TENSORPRODUKTE BEI COVOLLSTÄNDIGEN ADDITIVEN KATEGORIEN

Inaugural-Dissertation
zur
Erlangung der Doktorwürde
des Fachbereichs Mathematik
der Freien Universität Berlin

vorgelegt von
Harro Bernecker
aus Berlin

1974

TENSORPRODUKTE BEI COVOLLSTÄNDIGEN ADDITIVEN KATEGORIEN

Inaugural-Dissertation
zur
Erlangung der Doktorwürde
des Fachbereichs Mathematik
der Freien Universität Berlin

vorgelegt von
Harro Bernecker
aus Berlin

1. Referent: Professor Dr. G. Preuß

2. Referent: Professor Dr. H. Lenzing

Tag der mündlichen Prüfung: 19. Juli 1974

Tag der Promotion:

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Druck: Der Präsident der Freien Universität Berlin – Zentrale Universitätsdruckerei V aA 4, 1 Berlin 41

INHALTSVERZEICHNIS

I.	Einleitung	5
II.	Allgemeines Tensorprodukt und Anwendungen	11
1.	Definitionen und einfache Folgerungen	11
2.	Der Funktor $\mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}^{vv}$	13
3.	Sätze von Mitchell	14
4.	Sätze von Stenström, Lenzing, J. Fisher	17
5.	Eine Verallgemeinerung von Rein-Exaktheit und Flachheit	21
6.	Anwendungen in der Ring-Theorie Links-halberbliche und verwandte Ringe	25
III.	Tensorprodukte bei lokal endlich präsentierbaren Kategorien	33
1.	Vorbemerkung über lokal endlich präsentierbare Kategorien	33
2.	Kategorien linksexakter Funktoren	36
3.	Charakterisierung lokal endlich präsentierbarer Kategorien und Fortsetzungssätze	40
4.	Tensorprodukte bei lokal endlich präsentierbaren Kategorien	54
5.	Weitere Eigenschaften und Anwendungen von Tensorprodukten	60
	Literaturverzeichnis	66

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41546512_0091

I. Einleitung

Ab bezeichne die Kategorie der abelschen Gruppen. Ist R ein Ring mit 1, so bezeichne R-Mod (bzw. Mod-R) die Kategorie der unitären R-Links (bzw. Rechts)-Moduln. Watts[24] hat die Tensorproduktfunktoren $M\otimes_R^{\bullet} : R\text{-Mod} \longrightarrow Ab$ durch ihre Rechtsexaktheit und Coprodukt-Verträglichkeit charakterisiert. Diese Eigenschaft ist Anlaß für eine Verallgemeinerung:

$\mathcal{C}$ bezeichne im folgenden stets eine covollständige additive Kategorie. Ein costetiger Funktor von $\mathcal{C}$ nach Ab werde als Tensorproduktfunktor auf $\mathcal{C}$ bezeichnet. Wir betrachten die Kategorie $\mathcal{C}^\vee$ aller Tensorproduktfunktoren auf $\mathcal{C}$; $\mathcal{C}^\vee$ ist ebenfalls covollständig additiv. In diesem Zusammenhang sind der in beiden Variablen costetige Auswertungsfunktor $\top : \mathcal{C}\times\mathcal{C}^\vee \longrightarrow Ab$, der als Tensorprodukt bezeichnet wird (II.1.) und der kanonische Funktor $\sim : \mathcal{C} \longrightarrow (\mathcal{C}^\vee)^\vee$, der jedem $X\in|\mathcal{C}|$ den "Auswertungsfunktor an der Stelle X" zuordnet (II.2.) von Interesse.

Ziel der vorliegenden Arbeit ist die Untersuchung von Tensorprodukten und deren Anwendung. Ausgangspunkt ist dabei das Theorem von Mitchell[17] (Vgl. II.3.2.) . In II.3. werden bekannte Eigenschaften des Tensorprodukts bei Kategorien der Form $\mathcal{C} = Add(\mathcal{U}^{op}, Ab)$ zusammengestellt. Solche Kategorien sind eine Verallgemeinerung von Modulkategorien. In II.4. wird die Beziehung zwischen den intern definierten Begriffen der Rein-Exaktheit, Flachheit, Halbinjektivität bei Kategorien der Form $Add(\mathcal{U}^{op}, Ab)$ und dem Tensorprodukt (Stenström[21]) dargestellt und eine wichtige Charakterisierung dieser Begriffe (Lenzing[13]) bereitgestellt (Vgl. II.4.8.) .

In II.5. werden die Begriffe "Rein-Exaktheit", "Flachheit" für covollständige additive Kategorien $\mathcal{C}$ definiert, wie es durch II.4.4., II.4.5. nahegelegt wird:

Eine Sequenz $\mathcal{E} : 0 \longrightarrow X' \xrightarrow{\alpha} X \xrightarrow{\beta} X'' \longrightarrow 0$ in $\mathcal{C}$ heiße exakt, wenn α Monomorphismus und $\beta = \operatorname{cok}\alpha$ ist, sie heiße rein-exakt, wenn überdies $F(\mathcal{E})$ exakt in Ab für jedes $F\in|\mathcal{C}^\vee|$.

$M\in|\mathcal{C}|$ heiße flach, wenn für jede exakte Sequenz $\mathcal{F} : 0 \longrightarrow F' \longrightarrow F \longrightarrow F'' \longrightarrow 0$ in $\mathcal{C}^\vee$ auch $\mathcal{F}(M)$ exakt in Ab ist.

Analog erklärt man diese Begriffe für $\mathcal{C}^v$ mit Hilfe von $\mathcal{C}^{vv}$. Durch geeignete Voraussetzungen über den Funktor $\sim : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}^{vv}$ wird erreicht, daß der größte Teil der in II.4. zusammengestellten Beziehungen auch hier gilt, z.B.:

II.5.3. Ist $\sim$ repräsentativ, so ist die Sequenz $\mathcal{S}$ rein-exakt in $\mathcal{C}^v$ genau dann, wenn für jedes $M \in |\mathcal{C}|$ auch $\mathcal{S}(M)$ exakt in Ab ist

II.5.6. Ist $\sim$ exakt und haben $\mathcal{C}, \mathcal{C}^v$ genügend viele flache Objekte, so ist $M \in |\mathcal{C}|$ flach genau dann, wenn jede exakte Sequenz $0 \longrightarrow X' \longrightarrow X \longrightarrow M \longrightarrow 0$ in $\mathcal{C}$ rein-exakt ist.

Weitere Eigenschaften gelten, wenn $\sim$ Äquivalenz ist. Es sei noch angemerkt:

II.5.9. Ist $\sim : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}^{vv}$ eine Äquivalenz, so ist auch $\sim^v : \mathcal{C}^v \longrightarrow (\mathcal{C}^v)^{vv}$ eine Äquivalenz.

II.6. bringt Anwendungen von II.3. und II.4. in der Theorie der Moduln. Die Kriterien II.4.8. werden angewendet, um mit Hilfe der Äquivalenzen

$$\text{Mod-}R \longrightarrow \text{Add}(\underline{e\,e\,\text{proj}}_R{}^{op}, \text{Ab}) \quad , \quad R\text{-Mod} \longrightarrow \text{Add}(\underline{e\,e\,\text{proj}}_R, \text{Ab})$$
$$N \longmapsto \text{Hom}_R(\cdot, N)/\underline{e\,e\,\text{proj}}_R{}^{op} \qquad Y \longmapsto (\cdot \otimes Y)/\underline{e\,e\,\text{proj}}_R$$

einfache Beweise für verschiedene Sachverhalte zu erlangen. $\underline{e\,e\,\text{proj}}_R$ (bzw. $\underline{e\,e\,\text{proj}}_L$) bezeichne die volle Unterkategorie der endlich erzeugten projektiven R-Rechts (bzw. Links)-Moduln.

Man erhält Kriterien für Flachheit in Mod-R und Halbinjektivität in R-Mod, wenn $\underline{e\,e\,\text{proj}}_L$ Kerne hat (Dann hat $\underline{e\,e\,\text{proj}}_R$ Cokerne, die nicht mit denen in Mod-R übereinzustimmen brauchen; jedes endlich präsentierte E in Mod-R hat eine Reflexion $v_E : E \longrightarrow P_E$ in $\underline{e\,e\,\text{proj}}_R$), z.B.:

II.6.6. $\underline{e\,e\,\text{proj}}_L$ habe Kerne. Es gelten:

i) F flach in Mod-R $\iff$ $\text{Hom}(v_E, F)$ Isomorphismus für jedes endl. präs. E in Mod-R.

ii) M halbinj. in R-Mod $\iff$ $v_E \otimes M$ Isomorphismus für jedes endl. präs. E in Mod-R.

II.6.9. gibt eine Charakterisierung von links-kohärenten Ringen R mit $\text{glwdim}(R) \leqslant 2$.

II.6.11. R sei links-halberblich. Dann hat jeder R-Rechts-

Modul M einen kleinsten Untermodul tM, so daß M/tM flach ist (Lenzing[10]). Es gelten dann:

i) X flach in Mod-R $\iff$ Hom(tM,X) = 0 für jeden endl.präsent. R-Rechts-Modul M .

ii) Y halbinj. in R-Mod $\iff$ tM$\otimes$Y = 0 für jeden endl.präsent. R-Rechts-Modul M .

II.6.12. R links-halberblich $\iff$ halbinj. = Hülle von inj. in R-Mod ,

II.6.13. R links-noethersch und links-erblich $\iff$ inj. = Hülle von inj. in R-Mod

bezüglich der durch die Relation "$X \tau Y \iff X \otimes_R Y = 0$" gegebenen Galois-Korrespondenz zwischen den Verbänden der Teilklassen von Mod-R und R-Mod .

In Kapitel III. werden lokal endlich präsentierbare Kategorien betrachtet: Ist $\mathcal{C}$ covollständige additive Kategorie, so heißt $E \in |\mathcal{C}|$ endlich präsentiert, wenn $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(E,\cdot) : \mathcal{C} \longrightarrow Ab$ filtrierende Colimites bewahrt. Eine covollständige additive Kategorie $\mathcal{C}$ mit Generatormenge $\mathcal{G}$ von endl.präs. Objekten heiße lokal endlich präsentierbar. Ein Morphismus e in $\mathcal{C}$ heiße reiner Epimorphismus (bez. $\mathcal{G}$), wenn Hom(E,e) Epimorphismus in Ab für jedes $E \in \mathcal{G}$. Hat $\mathcal{C}$ überdies Kerne, so heiße eine Sequenz $0 \longrightarrow X \xrightarrow{\alpha} Y \xrightarrow{\beta} Z \longrightarrow 0$ in $\mathcal{C}$ exakt, wenn $\alpha = \mathrm{Ker}\,\beta$ und β Epimorphismus, rein-exakt (bez. $\mathcal{G}$), wenn $\alpha = \mathrm{Ker}\,\beta$ und β reiner Epimorphismus (bez. $\mathcal{G}$). Man hat hier also einen anderen Exaktheits-Begriff als in II.5. und im Gegensatz zu II.5. eine interne Definition von Rein-Exaktheit (III.1.). $\mathcal{C}$ sei im folgenden stets lokal endlich präsentierbar. Man erhält als Verallgemeinerung des Mitchell'schen Theorems II.3.2.:

III.3.5. $\mathcal{C}, \mathcal{G}$ seien wie oben. $\mathcal{C}$ habe Kerne; Coprodukte seien exakt (d.h. Kern-bewahrend). Ist $\mathcal{B}$ covollständig add., $T : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{B}$ additiver Funktor, so existiert bis auf Isomorphie genau eine Fortsetzung $\bar{T} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{B}$ von T mit

i) $\bar{T}$ bewahrt Coprodukte.

ii) $\bar{T}$ überführt rein-exakte Sequenzen (bez. $\mathcal{G}$) der Form $X \xrightarrow{\alpha} Y \xrightarrow{\beta} Z \longrightarrow 0$ in Cokerne, d.h. $\bar{T}(\beta) = \mathrm{cok}\,\bar{T}(\alpha)$.

Hieraus erhält man das Theorem von Mitchell als Korollar.

Bezeichnet $\mathcal{A}$ den Abschluß von $\mathcal{G}$ bezüglich Bildung endlicher Colimites in $\mathcal{C}$, so wird Rein-Exaktheit (bez. $\mathcal{A}$) analog erklärt und kurz als Rein-Exaktheit bezeichnet, da in wichtigen Fällen $\mathcal{A}$ repräsentativ für die volle Unterkategorie ep aller endlich präsentierten Objekte von $\mathcal{C}$ ist.

Ein solcher Fall liegt vor, wenn $\mathcal{C} = \mathrm{Lex}(\mathcal{A}^{\mathrm{op}}, \mathrm{Ab})$ die Kategorie aller linksexakten (d.h. Kern-bewahrenden) Funktoren ist ($\mathcal{A}$ klein additiv mit endlichen Coprodukten und Cokernen). Rein-Exaktheit in $\mathrm{Lex}(\mathcal{A}^{\mathrm{op}}, \mathrm{Ab})$ wird in III.2. untersucht: Eine Sequenz $0 \longrightarrow F' \longrightarrow F \longrightarrow F'' \longrightarrow 0$ in $\mathrm{Lex}(\mathcal{A}^{\mathrm{op}}, \mathrm{Ab})$ ist rein-exakt in $\mathrm{Lex}(\mathcal{A}^{\mathrm{op}}, \mathrm{Ab})$ genau dann, wenn sie rein-exakt in $\mathrm{Add}(\mathcal{A}^{\mathrm{op}}, \mathrm{Ab})$ in dem aus II.4. bekannten Sinne ist (III.2.7.).

Eine Charakterisierung von Kategorien der Form $\mathcal{C} \simeq \mathrm{Lex}(\mathcal{A}^{\mathrm{op}}, \mathrm{Ab})$ als covollständige additive Kategorien mit einer echten Generatormenge $\mathcal{G}$ von endlich präsentierten Objekten ergibt sich aus [9] von Gabriel, Ulmer. Die Bedingung, daß $\mathcal{G}$ echt ist, haben wir in III.3.1. abgeschwächt und in III.3.2. durch eine andere Bedingung ersetzt.

In III.4. wird ein modifiziertes Tensorprodukt für Kategorien der Form $\mathcal{C} \simeq \mathrm{Lex}(\mathcal{A}^{\mathrm{op}}, \mathrm{Ab})$ erklärt ($\mathcal{A}$ klein, additiv mit endlichen Colimites). $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{Ab}$ heiße modifizierter Tensorproduktfunktor auf $\mathcal{C}$, wenn F Coprodukt-verträglich und rechtsexakt auf rein-exakten Sequenzen der Form $X \to Y \to Z \to 0$ ist. $\mathcal{C}^{\vee}$ sei die Kategorie aller modifizierten Tensorproduktfunktoren auf $\mathcal{C}$. Es ist $\mathcal{C}^{\vee} \simeq \mathrm{Add}(\mathcal{A}, \mathrm{Ab})$. Es werden Zusammenhänge mit dem gewöhnlichen Tensorprodukt und mit $\mathrm{Add}(\mathcal{A}^{\mathrm{op}}, \mathrm{Ab})$ studiert, z.B.:

III.4.6. Für $F \in (\mathrm{Add}(\mathcal{A}^{\mathrm{op}}, \mathrm{Ab}))^{\vee} \simeq \mathrm{Add}(\mathcal{A}, \mathrm{Ab})$ sind äquivalent, wenn $\mathcal{A}$ additiv mit endlichen Colimites:

a) F ist halbinjektiv.
b) $F(u_D)$ ist Isomorphismus für jedes endl. präsentierte $D \in \mathrm{Add}(\mathcal{A}^{\mathrm{op}}, \mathrm{Ab})$, wobei u_D Reflexion von D in $\mathrm{Lex}(\mathcal{A}^{\mathrm{op}}, \mathrm{Ab})$.
c) $F/\mathrm{Lex}(\mathcal{A}^{\mathrm{op}}, \mathrm{Ab})$ ist rechtsexakt.

III.5.2.* Voraussetzungen wie III.4.6. Es sind äquivalent:

i) F ist flach.
ii) $F/\mathrm{Lex}(\mathcal{A}^{\mathrm{op}}, \mathrm{Ab})$ ist linksexakt.

Das modifizierte Tensorprodukt $\mathcal{C} \times \mathcal{C}^{\vee_0} \longrightarrow Ab$ ist in der zweiten Variablen exakt. Es sei angemerkt:

III.5.4. Für eine exakte Sequenz $0 \longrightarrow X' \longrightarrow X \longrightarrow X'' \longrightarrow 0$ in $\mathcal{C}$ sind äquivalent:

i) $0 \longrightarrow X' \longrightarrow X \longrightarrow X'' \longrightarrow 0$ ist rein-exakt in $\mathcal{C}$.

ii) $FX' \longrightarrow FX \longrightarrow FX'' \longrightarrow 0$ ist exakt in Ab für jedes $F \in |\mathcal{C}^{\vee_0}|$.

iii) $0 \longrightarrow FX' \longrightarrow FX \longrightarrow FX'' \longrightarrow 0$ ist exakt in Ab für jedes $F \in |\mathcal{C}^{\vee_0}|$.

Ferner werden die Funktoren $F \in |\mathcal{C}^{\vee}|$ charakterisiert, die exakt sind (III.5.6.) und weitere Kriterien für Halbinjektivität in R-Mod gegeben, wenn $\underline{e\,e\,proj}_L$ Kerne hat, d.h. wenn R links-kohärent ist und $glwdim(R) \leq 2$ (III.5.7.)

Zur Terminologie sei folgendes bemerkt: Ist $\mathcal{C}$ eine Kategorie, so wird i.a. die Objektklasse mit $|\mathcal{C}|$, die Morphismenklasse mit $Mor\,\mathcal{C}$ (oft auch kurz mit $\mathcal{C}$) bezeichnet. Ist $\mathcal{O}\mathcal{J}$ eine Teilklasse von Objekten von $\mathcal{C}$, so werde die zugehörige volle Unterkategorie von $\mathcal{C}$ auch mit $\mathcal{O}\mathcal{J}$ bezeichnet. Mißverständnisse können dabei nicht entstehen, da Objekte mit großen und Morphismen mit kleinen Buchstaben bezeichnet werden. Aus optischen Gründen wurde ebenfalls bei Kategorien, die eine längere Schreibweise erfordern, z.B. $Add(\mathcal{A}^{op}, Ab)$, auf die Kennzeichnung der Objektklasse durch $|\ |$ verzichtet. Objekte werden in diesem Fall mit großen lat. Buchstaben, Morphismen mit kleinen griech. Buchstaben bezeichnet.

Für $C \in |\mathcal{C}|$ wird der kovariante Hom-Funktor wahlweise mit $Hom_{\mathcal{C}}(C,\cdot)$ oder $[C,\cdot]_{\mathcal{C}}$ bezeichnet, oder auch nur mit $Hom(C,\cdot)$ bzw. $[C,\cdot]$. Ist I eine kleine filtrierende Kategorie, so werde ein Funktor $D : I \longrightarrow \mathcal{C}$ als filtrierendes System in $\mathcal{C}$ und ein Colimes von D in $\mathcal{C}$ als filtrierender Colimes bezeichnet (Schreibweise: $\varinjlim D$).

Wir benutzen folgende Abkürzungen: e.p. (endlich präsentiert), e.e. (endlich erzeugt), proj. (projektiv), inj. (injektiv), h.i. (halbinjektiv), e.e.proj. (endlich erzeugt projektiv). Die zugehörigen vollen Unterkategorien werden durch Unterstreichung dieser Abkürzungen gekennzeichnet, z.B. $\underline{e\,p} = \underline{e\,p}_{\mathcal{C}}$ = volle Unterkategorie aller endlich präsentierten Objekte von $\mathcal{C}$. Bei Modulkategorien sei $\underline{e\,p}_L$ = volle Unterkategorie der e.p. R-Links-Moduln, $\underline{e\,p}_R$ = volle Unterkategorie der e.p. R-Rechts-

Moduln . $\mathcal{A}$ ist in dieser Arbeit stets eine kleine Kategorie. Eine additive Kategorie braucht keine endlichen Coprodukte (d.h. Biprodukte) zu haben .

Ein Funktor $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{B}$ zwischen additiven Kategorien heißt linksexakt (rechtsexakt) , wenn $\mathcal{C}$ Kerne (Cokerne) hat und F Kerne (Cokerne) bewahrt ; F heißt exakt, wenn F rechts- und linksexakt ist.

Mein Dank gilt Herrn Prof. Dr. H. Lenzing , der mir die Anregung zu dieser Arbeit gab . Ebenso danke ich ihm und Herrn Prof. Dr. G. Preuß für das Interesse und die Förderung , die sie meiner Arbeit zuteil werden ließen .

II. Allgemeines Tensorprodukt und Anwendungen

II.1. Definitionen und einfache Folgerungen

$\mathcal{C}$ sei im folgenden stets eine covollständige, additive Kategorie.

II.1.1. DEFINITION $\mathcal{C}^\vee$ bezeichne die Kategorie aller costetigen Funktoren von $\mathcal{C}$ nach Ab, genaugenommen die entsprechende volle Unterkategorie von $\mathrm{Add}(\mathcal{C},\mathrm{Ab})$.

Mengentheoretische Probleme sollen hier nicht erörtert werden; nur soviel sei angemerkt: Benutzt man Universen und eine Bezeichnungsweise, die die Übernahme der Sprache der NBG-Mengenlehre gestattet, so ist in wichtigen Fällen $\mathcal{C}^\vee$ bis auf Äquivalenz eine Kategorie derselben Stufe wie $\mathcal{C}$.

II.1.2. FOLGERUNGEN $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{Ab}$ sei Funktor. Dann gilt:

a) F costetig $\Longrightarrow$ F additiv ; F bewahrt Epimorphismen.

b) F costetig $\Longleftrightarrow$ F bewahrt Coprodukte und Cokerne.

Ist $\mathcal{C}$ überdies exakte Kategorie, also abelsch (bzw. definiert man Rechtsexaktheit als Verträglichkeit mit Cokernen), so gilt F costetig $\Longleftrightarrow$ F bewahrt Coprodukte und ist rechtsexakt .

c) $\mathcal{C}^\vee$ ist abgeschlossen gegenüber Bildung von Colimites in $\mathrm{Add}(\mathcal{C},\mathrm{Ab})$. Insbesondere gilt:
$\mathcal{C}^\vee$ hat Colimites, und diese werden "punktweise" gebildet.
$\mathcal{C}^\vee$ ist covollständige, additive Kategorie.
Man kann daher $\mathcal{C}^{\vee\vee} = (\mathcal{C}^\vee)^\vee$ betrachten.

d) Ist $\mathcal{C}$ abelsche Kategorie , $P \in |\mathcal{C}|$ klein-projektiv in $\mathcal{C}$, so ist $\mathrm{Hom}(P,\cdot) \in |\mathcal{C}^\vee|$

II.1.3. BEMERKUNG Ein costetiger Funktor $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{Ab}$ werde auch als Tensorproduktfunktor auf $\mathcal{C}$ bezeichnet.
$\pi : \mathcal{C} \times \mathcal{C}^\vee \longrightarrow \mathrm{Ab}$ sei definiert als Einschränkung des Auswertungsfunktors $\mathcal{C} \times \mathrm{Add}(\mathcal{C},\mathrm{Ab}) \longrightarrow \mathrm{Ab}$.
π heißt Tensorprodukt , $\pi(C,F)$ Tensorprodukt von C und F

Für $f: X \to Y$ in $\mathcal{C}$ und $\varphi: F \to G$ in $\mathcal{C}^\vee$ ist
$\mathbb{T}(f,\varphi) = G(f)\circ\varphi_X = \varphi_Y \circ F(f)$; $\mathbb{T}(f,1_F) = F(f)$, $\mathbb{T}(1_X,\varphi) = \varphi_X$

$\mathbb{T}$ ist in beiden Variablen costetig. Dies ist für die erste Variable trivial und folgt für die zweite aus II.1.2.c . Die partiellen Funktoren $\tilde{C} \underset{\text{def.}}{=} \mathbb{T}(C,\cdot)$ und $\mathbb{T}(\cdot,F) = F$ sind also Tensorproduktfunktoren auf $\mathcal{C}^\vee$ bzw. $\mathcal{C}$. Insbesondere ist $\tilde{C} \in |\mathcal{C}^{\vee\vee}|$.

II.1.4. SATZ Hat $\mathcal{C}$ eine Generatormenge $\mathcal{G}$, so hat man einen treuen Funktor $\mathcal{C}^\vee \longrightarrow \mathrm{Add}(\mathcal{G},\mathrm{Ab})$, definiert durch $F \longmapsto F/\mathcal{G}$, $\varphi \longmapsto \varphi/\mathcal{G}$.

Ist $\mathcal{C}$ abelsch und $\mathcal{G}$ eine Generatormenge von projektiven Objekten, so ist $\mathcal{C}^\vee \longrightarrow \mathrm{Add}(\mathcal{G},\mathrm{Ab})$ voll.

(Hierbei wird $\mathcal{G}$ als volle Unterkategorie von $\mathcal{C}$ betrachtet)

BEWEIS Seien $F,G: \mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{Ab}$ Funktoren, F costetig, $\varphi, \psi : F \longrightarrow G$ nat. Transformationen mit $\varphi/\mathcal{G} = \psi/\mathcal{G}$
Man zeigt dann, daß $\varphi = \psi$, indem man benutzt, daß zu jedem $M \in |\mathcal{C}|$ ein Epimorphismus $C = \coprod_{i\in I} G_i \longrightarrow M$, $G_i \in \mathcal{G}$ existiert, und daß F Coprodukte und Epimorphismen bewahrt.

Die zweite Aussage ergibt sich durch Modifikation eines Beweises von Mitchell [17,Th.5.4] , der $\mathcal{C}$ als C_3-Kategorie voraussetzt und Ab durch eine exakte, additive Kategorie ersetzt: Sind $F,G: \mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{Ab}$ costetige Funktoren, $\lambda : F/\mathcal{G} \longrightarrow G/\mathcal{G}$ eine nat. Transformation, so setzt man λ auf die volle Unterkategorie aller Coprodukte von Objekten aus $\mathcal{G}$ fort. Die Natürlichkeit ergibt sich daraus, daß costetige Funktoren Coprodukte (u_i,C) mit ihren "Projektionen" p_j $(p_j\circ u_i = \delta_{ij})$ bewahren und in Ab diese"Projektionen" kürzbar sind. Zur Fortsetzung auf ganz $\mathcal{C}$ benutzt man projektive Auflösungen (Projektivität wird zum Nachweis der Natürlichkeit benötigt).

II.1.5. FOLGERUNG Ist $\mathcal{C}$ abelsch und hat eine Generatormenge $\mathcal{G}$ von projektiven Objekten, so ist $\mathcal{C}^\vee$ äquivalent zu einer Unterkategorie von $\mathrm{Add}(\mathcal{G},\mathrm{Ab})$. Bei Benutzung von Universen ist $\mathcal{C}^\vee$ in diesem Fall eine Kategorie derselben Stufe wie $\mathcal{C}$.

II.2. Der Funktor $\mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}^{vv}$

Gemäß Bemerkung II.1.3. ist für $X \in |\mathcal{C}|$ der Funktor $\widetilde{X} = \mathrm{T}(X,\cdot) : \mathcal{C}^v \longrightarrow$ Ab costetig, d.h. $\widetilde{X} \in |\mathcal{C}^{vv}|$ (Auswertungsfunktor an der Stelle X).

Ist $f: X \longrightarrow Y$ Morphismus in $\mathcal{C}$, so setze man $\widetilde{f} = \mathrm{T}(f,\cdot)$. Dann ist $\widetilde{f} : \widetilde{X} \longrightarrow \widetilde{Y}$ eine natürliche Transformation, d.h. $\widetilde{f} : \widetilde{X} \longrightarrow \widetilde{Y}$ Morphismus in $\mathcal{C}^{vv}$; denn für $\varphi : F \longrightarrow G$ in $\mathcal{C}^v$ ist das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{X}(F) = F(X) & \xrightarrow{\widetilde{f}_F = F(f)} & F(Y) = \widetilde{Y}(F) \\ \widetilde{X}(\varphi) = \varphi_X \downarrow & & \downarrow \widetilde{Y}(\varphi) = \varphi_Y \\ \widetilde{X}(G) = G(X) & \xrightarrow{\widetilde{f}_G = G(f)} & G(Y) = \widetilde{Y}(G) \end{array}$$

kommutativ, weil φ natürliche Transformation ist.

Daher liefert die Zuordnung $X \longmapsto \widetilde{X}$, $f \longmapsto \widetilde{f}$ einen Funktor $\sim : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}^{vv}$. Dieser ist wegen II.1.2.c costetig.

II.2.1. DEFINITION $\mathcal{C}^v$ heiße genügend groß, wenn zu je zwei Morphismen f, g in $\mathcal{C}$ mit $f \neq g$ ein $F \in |\mathcal{C}^v|$ existiert, so daß $F(f) \neq F(g)$

Man sieht leicht ein, daß $\mathcal{C}^v$ genau dann genügend groß ist, wenn die beiden folgenden Bedingungen erfüllt sind:

a) Sind $X, X' \in |\mathcal{C}|$ mit $X \neq X'$, so existiert $F \in |\mathcal{C}^v|$, so daß $F(X) \neq F(X')$.

b) Sind $X, Y \in |\mathcal{C}|$, $f, g \in [X,Y]$ mit $f \neq g$, so existiert $F \in |\mathcal{C}^v|$ mit $F(f) \neq F(g)$.

Hieraus ergibt sich sofort der

II.2.2. SATZ Äquivalent sind

i) $\mathcal{C}^v$ ist genügend groß

ii) $\sim : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}^{vv}$ ist eine Einbettung.

II.2.3. SATZ Äquivalent sind

i) $\mathcal{C}^v = 0$

ii) $\mathcal{C}^{vv} = 0$

iii) $\sim = 0$

BEWEIS i) $\Longrightarrow$ ii) $\Longrightarrow$ iii) trivial.

iii) $\Longrightarrow$ i) Ist $\sim = 0$, so folgt $\widetilde{X} = 0$ für jedes $X \in |\mathcal{C}|$ folglich $F(X) = \widetilde{X}(F) = 0$ für jedes $X \in |\mathcal{C}|$ und jedes $F \in |\mathcal{C}^{\vee}|$ $\Longrightarrow$ $F = 0$ für jedes $F \in |\mathcal{C}^{\vee}| \Longrightarrow \mathcal{C}^{\vee} = 0$.

II.2.4. KOROLLAR Ist $\mathcal{C}^{\vee}$ genügend groß oder $\mathcal{C} = \mathcal{K}^{\vee}$ für eine covollständige, additive Kategorie $\mathcal{K}$, so sind äquivalent

i) $\mathcal{C} = 0$

ii) $\mathcal{C}^{\vee} = 0$

BEWEIS i) $\Longrightarrow$ ii) trivial.

ii) $\Longrightarrow$ i) Im ersten Fall ist $\sim$ eine Einbettung (II.2.2.) und $\sim = 0$ (II.2.3.), folglich $\mathcal{C} = 0$. Im zweiten Fall ist $\mathcal{K}^{\vee\vee} = \mathcal{C}^{\vee} = 0$, folglich $\mathcal{C} = \mathcal{K}^{\vee} = 0$ (II.2.3.).

In den folgenden beiden Paragraphen sollen wichtige bekannte Beispiele und Begriffe, die an späterer Stelle benötigt werden, zusammengestellt werden.

II.3. Sätze von Mitchell

II.3.1. A sei ein Ring mit 1. Ist $\mathcal{C} = \text{Mod-}A$ (Kategorie der A-Rechts-Moduln), so hat man eine Äquivalenz von Kategorien $\mathcal{C}^{\vee} \longrightarrow$ A-Mod (Kategorie der A-Links-Moduln); und zwar sind die Funktoren

$S : \text{A-Mod} \longrightarrow (\text{Mod-}A)^{\vee}$ und $S' : (\text{Mod-}A)^{\vee} \longrightarrow \text{A-Mod}$

$E \longmapsto \cdot \otimes_A E$ $\qquad$ $F \longmapsto F(A)$

zueinander "inverse" Äquivalenzfunktoren; denn S ist voll und treu, und für jedes $F \in (\text{Mod-}A)^{\vee}$ gilt $F \cong \cdot \otimes_A F(A)$ (Watts[24])

Bekanntlich sind Modulkategorien charakterisierbar als covollständige, abelsche Kategorien mit einem kleinen, projektiven Generator. Faßt man A als additive Kategorie mit genau einem Objekt auf (Ringmultiplikation = Morphismenverknüpfung), so gilt $\text{A-Mod} = \text{Add}(A, \text{Ab})$, $\text{Mod-}A = \text{Add}(A^{\text{op}}, \text{Ab})$.

II.3.2. THEOREM (Mitchell[17]) $\mathcal{C}$ sei covollständige, abelsche Kategorie mit einer Generatormenge $\mathcal{A}$ von klein-projek-

tiven Objekten. $\mathcal{B}$ sei covollständig, additiv , $T : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ additiver Funktor. Dann gibt es bis auf Isomorphie genau einen costetigen Funktor $\overline{T} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{B}$ mit $\overline{T}/\mathcal{A} = T$.

BEMERKUNG Mitchell beweist den Satz für den Fall, daß $\mathcal{B}$ abelsch ist, was aber offenbar nicht nötig ist.

II.3.3. KOROLLAR (Freyd) Für eine Kategorie $\mathcal{C}$ sind äquiv.:
i) $\mathcal{C}$ ist äquivalent zu einer Funktorkategorie $\mathrm{Add}(\mathcal{A}^{\mathrm{op}}, \mathrm{Ab})$ mit kleiner, additiver Kategorie $\mathcal{A}$.
ii) $\mathcal{C}$ ist covollständig, abelsch mit einer Generatormenge $\mathcal{A}$ von klein-projektiven Objekten.
ZUSATZ Eine solche Kategorie ist Grotendieck-Kategorie, und $\mathcal{C} \xrightarrow{\Phi} \mathrm{Add}(\mathcal{A}^{\mathrm{op}}, \mathrm{Ab})$ ist Äquivalenzfunktor.
$C \longmapsto \mathrm{Hom}(\cdot, C)/\mathcal{A}^{\mathrm{op}}$

BEWEIS Man beachte, daß $\{[\cdot, A] \mid A \in |\mathcal{A}|\}$ eine Generatormenge von klein-projektiven Objekten für $\mathrm{Add}(\mathcal{A}^{\mathrm{op}}, \mathrm{Ab})$ ist, und daß $\mathcal{A} \cong \{[\cdot, A]_{\mathcal{A}} \mid A \in |\mathcal{A}|\}$ als volle Unterkategorien (Yoneda-Lemma). Mehrmalige Anwendung von II.3.2. liefert ii) $\Longrightarrow$ i), wobei sich Φ als Äquivalenzfunktor ergibt. Daß Φ Äquivalenz ist wird in [18] übrigens direkt gezeigt.

II.3.4. THEOREM (Mitchell [17]) $\mathcal{C}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{A}$ wie in II.3.2., $T, S : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ additive Funktoren; $\overline{T}, \overline{S} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{B}$ die costetigen Fortsetzungen von T und S . Zu jeder natürlichen Transformation $\eta : T \longrightarrow S$ existiert genau eine natürliche Transformation $\overline{\eta} : \overline{T} \longrightarrow \overline{S}$ mit $\overline{\eta}/\mathcal{A} = \eta$.
ZUSATZ $[T, S] \longrightarrow [\overline{T}, \overline{S}]$ $(\eta \longmapsto \overline{\eta})$ liefert einen natürlichen Isomorphismus $[\cdot, \cdot]_{\mathrm{Add}(\mathcal{A}, \mathrm{Ab})} \cong [\bar{\cdot}, \bar{\cdot}]_{\mathcal{C}^{\vee}}$.

II.3.5. KOROLLAR $\mathcal{C}$ sei covollständige, abelsche Kategorie mit Generatormenge $\mathcal{A}$ von klein-projektiven Objekten. Dann hat man eine Äquivalenz

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}^{\vee} & \xrightleftharpoons{\quad} & \mathrm{Add}(\mathcal{A}, \mathrm{Ab}) \\ & F \xrightarrow{\Psi} & F/\mathcal{A} \\ & \overline{T} \xleftarrow{\quad} & T \end{array}$$

ZUSATZ Insbesondere bewahren und reflektieren diese Funktoren Limites und Colimites. $\mathcal{C}^{\vee}$ ist covollständig, abelsch, und $\{[A, \cdot]_{\mathcal{C}} \mid A \in |\mathcal{A}|\}$ ist Generatormenge von klein-proj. Objekten für $\mathcal{C}^{\vee}$.

II.3.6. BEMERKUNG In Analogie zu II.3.1. setzt man $\mathrm{Add}(\mathcal{A}^{\mathrm{op}},\mathrm{Ab}) = \mathrm{Mod}\text{-}\mathcal{A}$, $\mathrm{Add}(\mathcal{A},\mathrm{Ab}) = \mathcal{A}\text{-Mod}$ als Verallgemeinerung von Modulkategorien über einem Ring A . Auf diese Kategorien von $\mathcal{A}$ -Moduln lassen sich fast alle ringtheoretischen und homologischen Begriffsbildungen, Sätze und Beweise übertragen (Lenzing [13] , Mitchell [18]) . $\mathcal{A}$ ist gewissermaßen ein "Ring mit mehreren Objekten" (Mitchell [18]). Dem Ring A in A-Mod entsprechen bei dieser Analogie die Hom-Funktoren in $\mathcal{A}$-Mod , den Idealen von A die Unterobjekte von Hom-Funktoren. (Endlich erzeugten) freien Moduln entsprechen (endliche) Coprodukte von Hom-Funktoren etc.. Fisher-Palmquist und Newell haben in [6] und [19] die Morita-Theoreme übertragen ; den A-B-Bimoduln entsprechen dabei Bifunktoren $\mathcal{A} \times \mathcal{B}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathrm{Ab}$.

II.3.7. BEMERKUNG Ist $\mathcal{C}$ wie in II.3.2., so erhält man aus dem Funktor $\mathbb{T}$ vermöge der Äquivalenzen II.3.3. und II.3.5. einen in beiden Variablen costetigen Funktor $\cdot \otimes \cdot : \mathrm{Add}(\mathcal{A}^{\mathrm{op}},\mathrm{Ab}) \times \mathrm{Add}(\mathcal{A},\mathrm{Ab}) \longrightarrow \mathrm{Ab}$, der ebenfalls als Tensorprodukt bezeichnet wird. Für $C \in |\mathcal{C}|$, $\overline{F} \in |\mathcal{C}^{\vee}|$, wobei $\overline{F}/\mathcal{A} = F \in \mathrm{Add}(\mathcal{A},\mathrm{Ab})$,hat man $\overline{F}(C) = \mathbb{T}(C,\overline{F}) = \mathrm{Hom}(\cdot,C)/\mathcal{A}^{\mathrm{op}} \otimes F$. Für $A \in |\mathcal{A}|$ ergibt sich daraus $[\cdot,A] \otimes F = F(A)$, d.h. $\cdot \otimes F$ ist die nach II.3.2. bis auf Isomorphie eindeutige costetige Fortsetzung von $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathrm{Ab}$. Die folgende Erweiterung von II.3.2. gestattet eine Symetrie-Aussage über den Funktor $\cdot \otimes \cdot$.

II.3.8. SATZ (Mitchell [18]) Voraussetzungen wie II.3.2., zusätzlich $\mathcal{K}$ eine additive (bzw. covollständige) Kategorie.
$T : \mathcal{A} \times \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{B}$ sei in der 1.Variablen additiv,
in der 2.Variablen additiv (bzw. costetig)
$\Longrightarrow$ Es gibt (bis auf Isomorphie) genau eine Fortsetzung
$\overline{T} : \mathcal{C} \times \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{B}$ von T mit: 1.Variable costetig,
2.Variable additiv (bzw. costetig)

Mit Satz II.3.8. erhält man zu dem Auswertungsfunktor $\mathcal{A} \times \mathrm{Add}(\mathcal{A},\mathcal{B}) \longrightarrow \mathcal{B}$ die in beiden Variablen costetige Fortsetzung $\mathrm{Add}(\mathcal{A}^{\mathrm{op}},\mathrm{Ab}) \times \mathrm{Add}(\mathcal{A},\mathcal{B}) \xrightarrow{\otimes_1} \mathcal{B}$. Analog erhält man zu dem Auswertungsfunktor $\mathrm{Add}(\mathcal{A}^{\mathrm{op}},\mathcal{B}) \times \mathcal{A}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathcal{B}$ die in beiden Variablen costetige Fortsetzung $\mathrm{Add}(\mathcal{A}^{\mathrm{op}},\mathcal{B}) \times \mathrm{Add}(\mathcal{A},\mathrm{Ab})$ $\xrightarrow{\otimes_2} \mathcal{B}$. Für $\mathcal{B} = \mathrm{Ab}$ stimmen $\otimes_1$ und $\otimes_2$ bis auf Isomorphie

überein (Mehrmalige Anwendung von II.3.8.). Insbesondere gilt auch $G \otimes [A,\cdot] = G(A)$ für $G \in \mathrm{Add}(\mathcal{A}^{\mathrm{op}}, \mathrm{Ab})$, $A \in |\mathcal{A}|$.

II.3.9. SATZ Ist $\mathcal{C}$ cov., abelsch mit Generatormenge $\mathcal{A}$ von klein-projektiven Objekten, so gilt:
a) $\mathcal{C}^\vee$ ist genügend groß, d.h. $\sim : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}^{\vee\vee}$ eine Einbettung.
b) $\sim : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}^{\vee\vee}$ ist Äquivalenzfunktor.
Insbesondere bewahrt und reflektiert $\sim$ Colimites und Limites.

BEWEIS a) gilt, weil $\{[A,\cdot]_{\mathcal{C}} \mid A \in |\mathcal{A}|\}$ Generatormenge von $\mathcal{C}^\vee$.
b) Man betrachte die Äquivalenzen

$\mathcal{C} \xrightarrow{\Phi} \mathrm{Add}(\mathcal{A}^{\mathrm{op}}, \mathrm{Ab})$, $\mathcal{C}^\vee \xrightarrow{\Psi} \mathrm{Add}(\mathcal{A}, \mathrm{Ab})$, $(\mathrm{Add}(\mathcal{A}, \mathrm{Ab}))^\vee \xrightarrow{\Psi^*} \mathcal{C}^{\vee\vee}$
$C \longmapsto [\cdot, C]/\mathcal{A}^{\mathrm{op}}$ $F \longmapsto F/\mathcal{A}$ $E \longmapsto E \circ \Psi$

und $\mathrm{Add}(\mathcal{A}^{\mathrm{op}}, \mathrm{Ab}) \xrightarrow{\chi} (\mathrm{Add}(\mathcal{A}, \mathrm{Ab}))^\vee$, wobei $\bar{G}$ die wegen II.3.2.
$G \longmapsto \bar{G}$
existierende costetige Fortsetzung von G ist. (Vgl. II.3.5.)
Man überzeugt sich mit Hilfe von II.3.2., daß $\sim \cong \Psi^* \circ \chi \circ \Phi$.

II.4. Sätze von Stenström, Lenzing, J. Fisher

$\mathcal{C}$ sei cov., abelsch mit einer Generatormenge $\mathcal{A}$ von klein-projektiven Objekten, d.h. $\mathcal{C} \simeq \mathrm{Add}(\mathcal{A}^{\mathrm{op}}, \mathrm{Ab})$, $\mathcal{C}^\vee \simeq \mathrm{Add}(\mathcal{A}, \mathrm{Ab})$ wegen II.3.

II.4.1. DEFINITION Ein Objekt $E \in |\mathcal{C}|$ heißt endlich präsentiert (endlich erzeugt) , wenn der Funktor $\mathrm{Hom}(E,\cdot) : \mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{Ab}$ filtrierende Colimites (filtrierende Vereinigungen) bewahrt. (Abkürzungen: e.p. , e.e.)

BEMERKUNG Diese Definition wird durch einen Satz von Lenzing [11] nahegelegt. Es gilt: klein-projektiv $\Longrightarrow$ e.p. $\Longrightarrow$ e.e. $\Longrightarrow$ klein . Für eine Kardinalzahl τ definiert man τ-präsentierbar mit τ-filtr. Colimites. Ein Objekt $E \in |\mathcal{C}|$ ist genau dann e.p. (bzw. e.e.), wenn es eine in $\mathcal{C}$ exakte Sequenz $F_2 \longrightarrow F_1 \longrightarrow E \longrightarrow 0$ (bzw. $F_1 \longrightarrow E \longrightarrow 0$) gibt, wobei F_1 und F_2 endliche Coprodukte von Objekten aus $\mathcal{A}$ sind (d.h. endlich erzeugte freie Objekte). e.p. (bzw. e.e.) ist die kleinste $\mathcal{A}$ oder e.e.frei oder e.e.proj. umfassende Unterkategorie von $\mathcal{C}$, die abgeschlossen gegen Bildung endlicher

Coprodukte und gegen Bildung von Cokernen (bzw. Quotienten) ist.

Ist $\mathcal{A}$ abgeschlossen gegen Bildung endlicher Coprodukte, so ist ein Objekt $E \in \mathrm{Add}(\mathcal{A}^{op}, Ab)$ e.p. genau dann, wenn es eine exakte Sequenz $\mathrm{Hom}(\cdot, A) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\cdot, B) \longrightarrow E \longrightarrow 0$ mit $A, B \in |\mathcal{A}|$ gibt, ein Objekt $F \in \mathrm{Add}(\mathcal{A}, Ab)$ e.p. genau dann, wenn es eine exakte Sequenz $\mathrm{Hom}(B, \cdot) \longrightarrow \mathrm{Hom}(A, \cdot) \longrightarrow F \longrightarrow 0$ mit $A, B \in |\mathcal{A}|$ gibt.

II.4.2. DEFINITION Eine exakte Sequenz $\mathfrak{E} : 0 \longrightarrow X' \longrightarrow X \longrightarrow X'' \longrightarrow 0$ in $\mathcal{C}$ heißt rein-exakt, wenn $\mathrm{Hom}(E, \mathfrak{E})$ exakt für jedes e.p. E in $\mathcal{C}$.

BEMERKUNG Ist Σ die Klasse aller kurzen exakten Sequenzen in $\mathcal{C}$, so definiert man vermöge " $X R \mathfrak{E} \Longleftrightarrow \mathrm{Hom}(X, \mathfrak{E})$ ist exakt" eine Relation R, die eine Galois-Korrespondenz zwischen den "Verbänden" der Teilklassen von $|\mathcal{C}|$ und Σ liefert (Szasz[23]). Man hat dann folgende Tabelle (für Kardinalzahlen $2 \leq \tau \leq \tau'$)

e.e.frei $\subset$	e.e.proj. $\subset$	e.p. $\subset$	τ-präs. $\subset$	τ'-präs. $\subset$	$\lvert\mathcal{C}\rvert$
Σ =	Σ $\supset$	rein-ex. $\supset$	τ-rein-ex. $\supset$	τ'-r.-ex. $\supset$	ex.-dir.
proj. =	proj. $\subset$	rein-proj $\subset$	τ-r.-proj $\subset$	τ'-r.-proj $\subset$	$\lvert\mathcal{C}\rvert$

Der Übergang von einer Zeile zur darunterstehenden erfolgt durch die Galois-Korrespondenz; z.B. $P \in |\mathcal{C}|$ rein-projektiv $\Longleftrightarrow$ Für jede rein-exakte Sequenz $\mathfrak{E}$ ist $\mathrm{Hom}(P, \mathfrak{E})$ exakt. In der dritten Zeile stehen also die abgeschlossenen Hüllen der ersten Zeile.

II.4.3. DEFINITION Ein Objekt $F \in |\mathcal{C}|$ heißt flach, wenn jede exakte Sequenz der Form $0 \longrightarrow X' \longrightarrow X \longrightarrow F \longrightarrow 0$ in $\mathcal{C}$ rein-exakt ist. Ein Objekt $H \in |\mathcal{C}|$ heißt halb-injektiv (h.i.), wenn jede exakte Sequenz der Form $0 \longrightarrow H \longrightarrow X \longrightarrow X'' \longrightarrow 0$ in $\mathcal{C}$ rein-exakt ist.

BEMERKUNG Flache Objekte sind gerade die reinen Quotienten von projektiven, bzw. freien Objekten. H.i. Objekte sind die reinen Unterobjekte von Injektiven. Hieraus ergeben sich verschiedene technische Charakterisierungen von Flachheit und Halbinjektivität, für die auf Lenzing[12] verwiesen sei. Es gilt exakt-direkt $\Longrightarrow$ rein-exakt ; projektiv $\Longrightarrow$ flach ; injektiv $\Longrightarrow$ h.i. ; projektiv $\Longleftrightarrow$ rein-projektiv und flach ;

e.e. projektiv $\Longleftrightarrow$ e.p. und flach . Die Beweise der folgenden Sätze beruhen auf dem Kern-Cokern-Lemma und dem Yoneda-Lemma.

II.4.4. THEOREM (Stenström[21]) Für eine exakte Sequenz $\mathfrak{E} : 0 \longrightarrow X' \longrightarrow X \longrightarrow X'' \longrightarrow 0$ in $\mathcal{C}$ sind äquivalent:

i) $\mathfrak{E}$ ist rein-exakt .

ii) $0 \longrightarrow F(X') \longrightarrow F(X) \longrightarrow F(X'') \longrightarrow 0$ exakt für alle $F \in |\mathcal{C}^{\vee}|$.

II.4.5. THEOREM ([21]) Für $M \in |\mathcal{C}|$ sind äquivalent:

i) M ist flach .

ii) Für jede exakte Sequenz $0 \longrightarrow F' \longrightarrow F \longrightarrow F'' \longrightarrow 0$ in $\mathcal{C}^{\vee}$ ist auch $0 \longrightarrow F'(M) \longrightarrow F(M) \longrightarrow F''(M) \longrightarrow 0$ exakt .

BEMERKUNG Diese Sätze statt auf $\mathcal{C}$ und $\mathcal{C}^{\vee}$ auf $\mathcal{C}^{\vee}$ und $\mathcal{C}^{\vee\vee}$ angewendet ergeben unter Berücksichtigung der Äquivalenz $\sim : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}^{\vee\vee}$ (II.3.9.) : Eine exakte Sequenz $0 \longrightarrow F' \longrightarrow F \longrightarrow F'' \longrightarrow 0$ in $\mathcal{C}^{\vee}$ ist rein-exakt genau dann, wenn $0 \longrightarrow F'(X) \longrightarrow F(X) \longrightarrow F''(X) \longrightarrow 0$ exakt für jedes $X \in |\mathcal{C}|$. $F \in |\mathcal{C}^{\vee}|$ ist flach genau dann, wenn für jede exakte Sequenz $0 \longrightarrow X' \longrightarrow X \longrightarrow X'' \longrightarrow 0$ in $\mathcal{C}$ auch $0 \longrightarrow F(X') \longrightarrow F(X) \longrightarrow F(X'') \longrightarrow 0$ exakt ist . Daraus ergibt sich das folgende

II.4.6. LEMMA Für $\mathcal{C} = \mathrm{Add}(\mathcal{O}\mathfrak{l}^{\mathrm{op}}, \mathrm{Ab}) = \mathrm{Mod}\text{-}\mathcal{O}\mathfrak{l}$ sind äquivalent:

o) Alle e.p. Objekte in $\mathcal{C}$ sind projektiv

i) Alle kurzen exakten Sequenzen in $\mathcal{C}$ sind rein-exakt .

ii) Alle Objekte in $\mathcal{C}$ sind flach . ($\mathcal{C}$ v.Neumann regulär)

iii) Alle kurzen exakten Sequenzen in $\mathcal{C}^{\vee}$ sind rein-exakt .

iv) Alle Objekte in $\mathcal{C}^{\vee}$ sind flach . ($\mathcal{C}^{\vee}$ v.Neumann regulär)

In [21] findet sich auch die Adjungiertheitsformel für das Tensorprodukt $[F(M),G]_{\mathrm{Ab}} \cong [M,[F,G]_{\mathrm{Ab}}]_{\mathcal{C}} \cong [F,[M,G]_{\mathrm{Ab}}]_{\mathcal{C}^{\vee}}$.

II.4.7. SATZ (Lenzing[13]) Für eine exakte Sequenz $\mathfrak{E} : 0 \longrightarrow G' \longrightarrow G \longrightarrow G'' \longrightarrow 0$ in $\mathcal{C} = \mathrm{Add}(\mathcal{O}\mathfrak{l}^{\mathrm{op}}, \mathrm{Ab})$ sind äquivalent:

i) $\mathfrak{E}$ ist rein-exakt .

ii) Für jeden Morphismus $f : A \longrightarrow B$ in $\mathcal{O}\mathfrak{l}$ ist die zugehörige Kern-Sequenz $0 \longrightarrow \mathrm{Ker}(G'(f)) \longrightarrow \mathrm{Ker}(G(f)) \longrightarrow \mathrm{Ker}(G''(f)) \longrightarrow 0$ ex.

Hiermit, mit dem Yoneda-Lemma und dem Kern-Cokern-Lemma beweist man den folgenden Satz :

II.4.8. THEOREM (Lenzing[13]) $\mathcal{A}$ sei additiv mit endlichen Coprodukten. Hat $\mathcal{A}$ Kerne, so sind für $F \in \mathrm{Add}(\mathcal{A}, \mathrm{Ab})$ äquivalent:
i) F ist flach .
ii) F ist linksexakt (d.h. bewahrt Kerne) .
Hat $\mathcal{A}$ Cokerne, so sind für $F \in \mathrm{Add}(\mathcal{A}, \mathrm{Ab})$ äquivalent:
i) F ist halb-injektiv .
ii) F ist rechtsexakt (d.h. bewahrt Cokerne) .

Für den Fall, daß $\mathcal{A}$ abelsch ist, findet sich das Kriterium der Flachheit schon bei J.Fisher[5] . Analoge Sätze gelten natürlich für $\mathrm{Add}(\mathcal{A}^{\mathrm{op}}, \mathrm{Ab})$.

II.4.9. FOLGERUNG Ist $\mathcal{A}$ additiv mit endlichen Coprodukten und Kernen, so gelten: a) Limites (insbes. Produkte und Kerne) flacher Objekte in $\mathrm{Add}(\mathcal{A}, \mathrm{Ab})$ sind wieder flach ,
b) Colimites (insbes. filtr. Colimites und Cokerne) von h.i. Objekten in $\mathrm{Add}(\mathcal{A}^{\mathrm{op}}, \mathrm{Ab})$ sind h.i. .
Die Kategorie $\mathrm{Add}(\mathcal{A}^{\mathrm{op}}, \mathrm{Ab}) = \mathrm{Mod}\text{-}\mathcal{A}$ ist folglich lokal kohärent (d.h. e.p. Objekte sind kohärent) und hat $\mathrm{wgldim} \leq 2$.

II.4.10. LEMMA $\mathcal{A}$ sei wie in II.4.9. Dann gelten:
a) Ist $\underline{\mathrm{inj.}} \subset \underline{\mathrm{flach}}$ in $\mathrm{Add}(\mathcal{A}, \mathrm{Ab}) = \mathcal{A}\text{-Mod}$, so ist $\mathcal{A}$-Mod v.Neuman regulär .
b) Ist $\mathcal{A} \subset \underline{\mathrm{h.i.}}$ in $\mathrm{Add}(\mathcal{A}^{\mathrm{op}}, \mathrm{Ab}) = \mathrm{Mod}\text{-}\mathcal{A}$, so ist $\mathcal{A}$-Mod v.Neumann regulär .

BEWEIS Unter Benutzung injektiver Auflösungen (bzw. freier Auflösungen) folgt aus II.4.9.a (bzw. II.4.9.b) , daß alle Objekte in $\mathcal{A}$-Mod flach (bzw. in $\mathrm{Mod}\text{-}\mathcal{A}$ h.i.) sind.

II.5. Eine Verallgemeinerung von Rein-Exaktheit und Flachheit

Nimmt man die Aussagen der Theoreme II.4.4., II.4.5. als Definitionen, so erhält man die damit verwandten Aussagen mit den Methoden Stenströms[21] aber unter schwächeren Voraussetzungen. $\mathcal{C}$ braucht nicht abelsch zu sein und keine Generatormenge von klein-projektiven Objekten zu haben. Jedoch werden Bedingungen an den Funktor $\sim : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}^{vv}$ gestellt:

$\mathcal{C}$ sei cov., additive Kategorie. Dann sind $\mathcal{C}^{v}, \mathcal{C}^{vv}$ ebenfalls cov., additiv , und man hat den costetigen, insbesondere rechtsexakten Funktor $\sim : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}^{vv}$ (II.2.) .

KONVENTION Eine Sequenz $0 \longrightarrow X' \xrightarrow{\alpha} X \xrightarrow{\beta} X'' \longrightarrow 0$ heiße exakt , wenn α mono und $\beta = \operatorname{cok}\alpha$, bzw. exakt-direkt , wenn α Coretrakt und $\beta = \operatorname{cok}\alpha$. Im Falle einer exakten Kategorie (insbesondere für Ab) stimmen die hier vereinbarten Begriffe von Exaktheit mit den üblichen überein. Ein Funktor heiße exakt, wenn er exakte Sequenzen in diesem Sinne respektiert , d.h. Monomorphismen und Cokerne bewahrt.

II.5.1. DEFINITION Eine exakte Sequenz $\mathfrak{E} : 0 \longrightarrow X' \longrightarrow X \longrightarrow X'' \longrightarrow 0$ in $\mathcal{C}$ heiße rein-exakt , wenn $F(\mathfrak{E}) : 0 \longrightarrow F(X') \longrightarrow F(X) \longrightarrow F(X'') \longrightarrow 0$ exakt in Ab für jedes $F \in |\mathcal{C}^{v}|$.

BEMERKUNG Exakt-direkt $\Longrightarrow$ rein-exakt .

II.5.2. DEFINITION $M \in |\mathcal{C}|$ heiße flach , wenn für jede exakte Sequenz $\mathfrak{F} : 0 \longrightarrow F' \longrightarrow F \longrightarrow F'' \longrightarrow 0$ in $\mathcal{C}^{v}$ auch die Sequenz $\mathfrak{F}(M) : 0 \longrightarrow F'(M) \longrightarrow F(M) \longrightarrow F''(M) \longrightarrow 0$ in Ab exakt ist , d.h. wenn $\widetilde{M} : \mathcal{C}^{v} \longrightarrow Ab$ exakt ist .

Diese Konvention und Definitionen gelten nur in diesem Paragraphen. Analog müssen Rein-Exaktheit und Flachheit in $\mathcal{C}^{v}$ mit Hilfe von $\mathcal{C}^{vv}$ erklärt werden.

II.5.3. SATZ Sei $\mathfrak{F} : 0 \longrightarrow F' \longrightarrow F \longrightarrow F'' \longrightarrow 0$ eine Sequenz in $\mathcal{C}^{v}$. Man hat folgende Aussagen:

$\mathcal{F}$ rein-exakt in $\mathcal{C}^{\vee} \Longrightarrow \mathcal{F}(X)$ exakt in Ab für jedes $X \in |\mathcal{C}|$
d.h. $\mathcal{F}$ exakt in $\mathrm{Add}(\mathcal{C}, \mathrm{Ab})$.
Ist $\sim : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}^{\vee\vee}$ repräsentativ, so gilt die Umkehrung.

BEWEIS $\mathcal{F}$ rein-exakt in $\mathcal{C}^{\vee} \Longleftrightarrow \mathcal{F}$ exakt und $\phi(\mathcal{F})$ exakt für jedes $\phi \in |\mathcal{C}^{\vee\vee}|$.
Für $X \in |\mathcal{C}|$ ist $\tilde{X} \in |\mathcal{C}^{\vee\vee}|$, folglich gilt " $\Longrightarrow$ " .
Aus der Exaktheit von $\mathcal{F}$ in $\mathrm{Add}(\mathcal{C}, \mathrm{Ab})$ folgt die Exaktheit von $\mathcal{F}$ in $\mathcal{C}^{\vee}$. Ist $\sim$ repräsentativ, so erhält man " $\Longleftarrow$ "

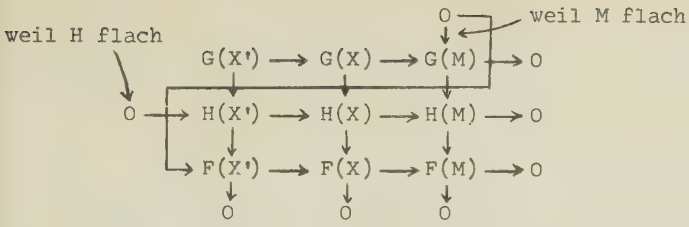
II.5.4. SATZ Ist $\sim : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}^{\vee\vee}$ exakt (d.h. bewahrt Monomorphismen) , so gilt:
$F \in |\mathcal{C}^{\vee}|$ flach $\Longrightarrow$ Für jede exakte Sequenz
$\mathfrak{E} : 0 \longrightarrow X' \longrightarrow X \longrightarrow X'' \longrightarrow 0$ in $\mathcal{C}$ ist auch die Sequenz $F(\mathfrak{E})$:
$0 \longrightarrow F(X') \longrightarrow F(X) \longrightarrow F(X'') \longrightarrow 0$ exakt , d.h. F ist exakt .
Ist $\sim : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}^{\vee\vee}$ Äquivalenz , so gilt auch die Umkehrung.

BEWEIS $F \in |\mathcal{C}^{\vee}|$ flach $\Longleftrightarrow$ Für jede exakte Sequenz
$0 \longrightarrow \phi' \longrightarrow \phi \longrightarrow \phi'' \longrightarrow 0$ in $\mathcal{C}^{\vee\vee}$ ist auch die Sequenz
$0 \longrightarrow \phi'(F) \longrightarrow \phi(F) \longrightarrow \phi''(F) \longrightarrow 0$ exakt .
Äquivalenzfunktoren bewahren und reflektieren Limites, Colimites, Monomorphismen, also auch exakte Sequenzen.

II.5.5. KOROLLAR a) Alle kurzen exakten Sequenzen in $\mathcal{C}^{\vee}$ rein-exakt $\Longrightarrow$ Alle $M \in |\mathcal{C}|$ flach .
Ist $\sim : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}^{\vee\vee}$ repräsentativ, so gilt die Umkehrung.
b) Ist $\sim : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}^{\vee\vee}$ exakt , so gilt: Alle $F \in |\mathcal{C}^{\vee}|$ flach $\Longrightarrow$ Alle kurzen exakten Sequenzen in $\mathcal{C}$ rein-exakt .
Ist $\sim : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}^{\vee\vee}$ Äquivalenz , so gilt die Umkehrung .

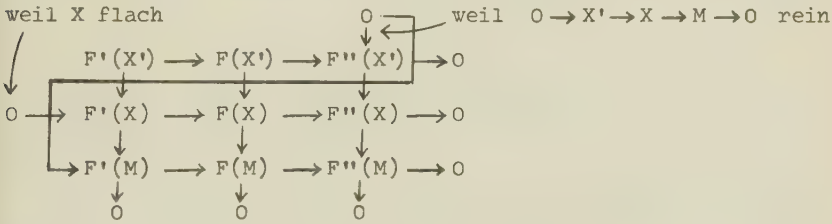
II.5.6. SATZ Ist $\sim : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}^{\vee\vee}$ exakt, und hat $\mathcal{C}^{\vee}$ genügend viele Flache (d.h. gibt es zu jedem $F \in |\mathcal{C}^{\vee}|$ eine exakte Sequenz $0 \longrightarrow G \longrightarrow H \longrightarrow F \longrightarrow 0$ mit H flach) , so gilt:
$M \in |\mathcal{C}|$ flach $\Longrightarrow$ Jede exakte Sequenz $0 \longrightarrow X' \longrightarrow X \longrightarrow M \longrightarrow 0$ ist rein-exakt in $\mathcal{C}$.
Hat $\mathcal{C}$ genügend viele Flache , so gilt die Umkehrung (ohne Voraussetzung an $\mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}^{\vee\vee}$ und $\mathcal{C}^{\vee}$) .

BEWEIS Beide Richtungen mit Kern-Cokern-Lemma in Ab .
" $\Longrightarrow$ " $F \in |\mathcal{C}^{\vee}|$ beliebig, $0 \longrightarrow G \longrightarrow H \longrightarrow F \longrightarrow 0$ exakt, H flach .



Also $0 \to F(X') \to F(X) \to F(M) \to 0$ exakt .

"$\Longleftarrow$" Sei $0 \to F' \to F \to F'' \to 0$ eine exakte Sequenz in $\mathcal{C}^\vee$. Sei $0 \to X' \to X \to M \to 0$ exakt in $\mathcal{C}$ und X flach in $\mathcal{C}$; nach Voraussetzung ist diese Sequenz rein-exakt .



Also $0 \to F'(M) \to F(M) \to F''(M) \to 0$ exakt .

II.5.7. KOROLLAR a) Ist $\sim : \mathcal{C} \to \mathcal{C}^{\vee\vee}$ Äquivalenz und hat $\mathcal{C}^\vee$ genügend viele Flache, so gilt:
Alle $M \in |\mathcal{C}|$ flach $\Longrightarrow$ Alle $F \in |\mathcal{C}^\vee|$ flach .
b) Ist $\sim : \mathcal{C} \to \mathcal{C}^{\vee\vee}$ exakt und hat $\mathcal{C}$ genügend viele Flache, so gilt: Alle $F \in |\mathcal{C}^\vee|$ flach $\Longrightarrow$ Alle $M \in |\mathcal{C}|$ flach .

BEWEIS mit II.5.4. und II.5.6.

II.5.8. KOROLLAR Hat $\mathcal{C}$ genügend viele Flache und ist jeder Monomorphismus in $\mathcal{C}$ ein Kern , so gilt:
P projektiv in $\mathcal{C}$ $\Longrightarrow$ P flach in $\mathcal{C}$ $\Longleftrightarrow$ $\widetilde{P}$ exakt .

ZUSAMMENFASSUNG
3' Rein-Exaktheit in $\mathcal{C}^\vee \Longleftrightarrow$ Exaktheit in Add($\mathcal{C}$,Ab) ($\sim$ repr.)
4' F flach in $\mathcal{C}^\vee \Longleftrightarrow$ F exakter Funktor , wenn $\sim$ Äquivalenz .
5' Alle $M \in |\mathcal{C}|$ flach $\Longleftrightarrow$ Alle kurzen ex.Sequ.in $\mathcal{C}^\vee$ rein($\sim$ repr.)
Alle $F \in |\mathcal{C}^\vee|$ flach $\Longleftrightarrow$ Alle kurzen ex.Sequ.in $\mathcal{C}$ rein($\sim$ Äqu.)
6' Haben $\mathcal{C}$ und $\mathcal{C}^\vee$ genügend viele Flache, so gilt, wenn $\sim$ ex.:
$M \in |\mathcal{C}|$ flach $\Longleftrightarrow$ Jede ex.Sequ. $0 \to X' \to X \to M \to 0$ ist rein.

7' Haben $\mathcal{C}$ und $\mathcal{C}^\vee$ genügend viele Flache, so gilt, wenn $\sim$ Äquivalenz:
Alle $M \in |\mathcal{C}|$ flach $\Longleftrightarrow$ Alle $F \in |\mathcal{C}^\vee|$ flach.

Als Ergänzung zu II.2. sei noch notiert

II.5.9. SATZ Ist $\sim : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}^{\vee\vee}$ eine Äquivalenz, so ist auch der analoge Funktor $\sim^\vee : \mathcal{C}^\vee \longrightarrow (\mathcal{C}^\vee)^{\vee\vee}$ eine Äquivalenz.

BEWEIS Aus der Äquivalenz $\sim : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}^{\vee\vee}$ erhält man die Äquivalenz

$$\begin{aligned} \sim^* : (\mathcal{C}^{\vee\vee})^\vee &\longrightarrow \mathcal{C}^\vee \\ \phi &\longmapsto \phi \circ \sim \\ \mu &\longmapsto \mu \circ \sim \end{aligned}$$

Es ist $\widetilde{X}(F) = F(X)$, $\widetilde{X}(\varphi) = \varphi_X$, $\widetilde{f}_F = F(f)$ für $X \in |\mathcal{C}|$, $f \in \mathcal{C}$, $F \in |\mathcal{C}^\vee|$, $\varphi \in \mathcal{C}^\vee$.
$\widetilde{F}^\vee(\phi) = \phi(F)$, $\widetilde{F}^\vee(\mu) = \mu_F$, $\widetilde{\varphi}^\vee_\phi = \phi(\varphi)$ für $\phi \in |\mathcal{C}^{\vee\vee}|$, $\mu \in \mathcal{C}^{\vee\vee}$.
Weiter ist $(\mu \circ \sim)_X = \mu_{\widetilde{X}}$ für $X \in |\mathcal{C}|$. Daher gilt:

$\sim^* \circ \sim^\vee (F) = \sim^* (\widetilde{F}^\vee) = \widetilde{F}^\vee \circ \sim = F$, weil
$\widetilde{F}^\vee \circ \sim (X) = \widetilde{F}^\vee (\widetilde{X}) = \widetilde{X}(F) = F(X)$, $\widetilde{F}^\vee \circ \sim (f) = \widetilde{F}^\vee (\widetilde{f}) = \widetilde{f}_F = F(f)$.
$\sim^* \circ \sim^\vee (\varphi) = \sim^* (\widetilde{\varphi}^\vee) = \widetilde{\varphi}^\vee \circ \sim = \varphi$, weil
$(\widetilde{\varphi}^\vee \circ \sim)_X = \widetilde{\varphi}^\vee_{\widetilde{X}} = \widetilde{X}(\varphi) = \varphi_X$.

Also ist $\sim^* \circ \sim^\vee = 1_{\mathcal{C}^\vee}$. Da $\sim^*$ Äquivalenz ist, ist auf Grund eines Standard-Beweises $\sim^\vee$ Äquivalenz-Inverses zu $\sim^*$, insbesondere $\sim^\vee$ selbst Äquivalenz.

Da $\sim$ costetig ist, existiert der Funktor $\sim^*$ stets. Dem vorangegangenen Beweis entnimmt man das

II.5.10. LEMMA Für den Funktor $\sim^\vee : \mathcal{C}^\vee \longrightarrow (\mathcal{C}^\vee)^{\vee\vee}$ und den von $\sim : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}^{\vee\vee}$ induzierten Funktor $\sim^* : (\mathcal{C}^{\vee\vee})^\vee \longrightarrow \mathcal{C}^\vee$ gilt stets $\sim^* \circ \sim^\vee = 1_{\mathcal{C}^\vee}$.

II.6. Anwendungen in der Ring-Theorie

Links-halberbliche und verwandte Ringe

R sei ein Ring mit 1 , R-Mod (bzw. Mod-R) die Kategorie der R-Links-Moduln (bzw. R-Rechts-Moduln) . Die volle Unterkategorie der endlich erzeugten projektiven R-Links-Moduln,(genauer ein Skelett davon) , werde mit $\underline{e\,e\,proj}_L$ bezeichnet. (Analog $\underline{e\,p}_L$, $\underline{flach}_L$; $\underline{e\,e\,proj}_R$, $\underline{e\,p}_R$, $\underline{flach}_R$ volle Unterkategorien von R-Rechts-Moduln) . $|\underline{e\,e\,proj}_L|$ ist dann Generatormenge von klein-projektiven Objekten für R-Mod .

II.6.1. In Anknüpfung an II.3.3. erhält man eine Äquivalenz

$$\begin{array}{ccc} \text{R-Mod} & \longrightarrow & \text{Add}(\underline{e\,e\,proj}_L{}^{op}, \text{Ab}) \\ M & \overset{\Phi}{\longmapsto} & \text{Hom}_R(\cdot, M)/\underline{e\,e\,proj}_L{}^{op} \\ F(R) & \overset{\Psi}{\longleftarrow} & F \end{array}$$

Daß Ψ Äquivalenz-Inverses zu Φ ist , macht man sich leicht klar : Ist nämlich $F \cong \text{Hom}_R(\cdot, N)/\underline{e\,e\,proj}_L$ für einen R-Links-Modul N , so folgt $F(R) \cong \text{Hom}_R(R,N) \cong N$.

Aus II.3.1. und II.3.5. erhält man eine Äquivalenz

$$\begin{array}{ccc} \text{Mod-R} & \longrightarrow & \text{Add}(\underline{e\,e\,proj}_L, \text{Ab}) \\ X & \longmapsto & (X \otimes \cdot)/\underline{e\,e\,proj}_L \\ F(R) & \longleftarrow & F \end{array}$$

Zum Beweis betrachte man folgendes Diagramm von Äquivalenzen:

$$\begin{array}{ccc} (\text{Add}(\underline{e\,e\,proj}_L{}^{op}, \text{Ab}))^{\vee} & \xrightarrow{\sim} & \text{Add}(\underline{e\,e\,proj}_L, \text{Ab}) \\ \| & & \\ (\text{R-Mod})^{\vee} & \xrightarrow{\sim} & \text{Mod-R} \end{array} \quad , \text{ wobei}$$

$$(X \otimes \cdot)\circ\Psi \longmapsto (X \otimes \cdot)\circ\Psi/\underline{e\,e\,proj}_L \quad \text{und} \quad \begin{array}{ccc} \overline{F} & \longleftarrow & F \\ \downarrow & & \\ \overline{F}\circ\Phi & \longmapsto & \overline{F}\circ\Phi(R) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} X \otimes \cdot & \longleftarrow & X \\ \uparrow & & \\ \end{array}$$

Außerdem gilt hierbei

$\overline{F}\circ\Phi(R) = \overline{F}\,(\,\text{Hom}_R(\cdot, R)/\underline{e\,e\,proj}_L{}^{op}) = F(R)$, weil $R \in \underline{e\,e\,proj}_L$.

$(X \otimes \cdot)\circ\Psi/\underline{e\,e\,proj}_L = (X \otimes \cdot)/\underline{e\,e\,proj}_L$, weil $\Psi/\underline{e\,e\,proj}_L =$

$\underline{e\,e\,proj}_L \hookrightarrow$ R-Mod Einbettung

II.6.2. Analog erhält man für $\underline{e\,e\,proj}_R \subset$ Mod-R die Äquivalenzen

$$\begin{array}{ccc} \text{Mod-R} & \longrightarrow & \text{Add}(\underline{e\,e\,proj}_R^{\,op}, \text{Ab}) \\ N & \longmapsto & \text{Hom}(\cdot, N)/\underline{e\,e\,proj}_R \\ F(R) & \longleftarrow\!\shortmid & F \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \text{R-Mod} & \longrightarrow & \text{Add}(\underline{e\,e\,proj}_R, \text{Ab}) \\ Y & \longmapsto & (\cdot \otimes Y)/\underline{e\,e\,proj}_R \\ F(R) & \longleftarrow\!\shortmid & F \end{array}$$

VORBEMERKUNG Wegen II.4.8. sind folgende Fälle interessant:
a) $\underline{e\,e\,proj}_L$ hat Cokerne .
b) $\underline{e\,e\,proj}_L$ hat Kerne .

Zu a) gehört als Spezialfall , daß $\underline{e\,e\,proj}_L$ abgeschlossen gegen Bildung von Cokernen in R-Mod ist ; während $\underline{e\,e\,proj}_L$ genau dann Kerne hat , wenn $\underline{e\,e\,proj}_L$ abgeschlossen gegen Bildung von Kernen in R-Mod ist .

BEWEIS Man überlegt sich, daß jeder Monomorphismus in $\underline{e\,e\,proj}_L$ auch Monomorphismus in R-Mod ist . Hierbei benutzt man, daß $R \in \underline{e\,e\,proj}_L$ und R Generator von R-Mod ist . In $\underline{e\,e\,proj}_L$ gebildete Kerne sind daher Unterobjekte der entsprechenden in R-Mod gebildeteten Kerne ; ein indirekter Schluß zeigt , daß sie sogar gleich sind (Abermalige Verwendung des Generators R) .

II.6.3. Zunächst einige Ring-theoretische Vorbemerkungen . Hierbei heiße $\mathcal{K}$ abelsche Unterkategorie von R-Mod , wenn $\mathcal{K}$ abelsche Kategorie und $\mathcal{K} \longrightarrow$ R-Mod exakte Einbettung .

R links-noethersch $\Longleftrightarrow \underline{e\,e}_L = \underline{e\,p}_L$
$\Longleftrightarrow \underline{e\,e}_L$ abgeschlossen gegen Bildung von Kernen
$\Longleftrightarrow \underline{e\,e}_L$ abelsche Unterkategorie von R-Mod

R links-kohärent $\Longleftrightarrow \underline{e\,p}_L = \underline{koh}_L$
$\Longleftrightarrow \underline{e\,p}_L$ abgeschlossen gegen Bildung von Kernen
$\Longleftrightarrow \underline{e\,p}_L$ abelsche Unterkategorie von R-Mod

R v.Neumann regulär $\Longleftrightarrow \underline{e\,p}_L = \underline{e\,e\,proj}_L$

(d.h. alle exakten Sequenzen in R-Mod sind rein-exakt , bzw. alle R-Links-Moduln sind flach , bzw. alle exakten Sequenzen in Mod-R sind rein-exakt)

R v.Neumann regulär

$\Longleftrightarrow$ $\underline{e\,e\,proj}_L$ abgeschlossen gegen Bildung von Cokernen

$\Longleftrightarrow$ $\underline{e\,e\,proj}_L$ abelsche Unterkategorie von R-Mod

Die folgenden Implikationen sind elementar:

von Neumann regulär

$\Updownarrow$

$\underline{e\,e\,proj}_L$ abg. gegen Cokerne in R-Mod — links-noethersch

$\Downarrow$ $\Downarrow$

links-halberblich $\Longrightarrow$ $\underline{e\,e\,proj}_L$ hat Kerne $\overset{*}{\Longrightarrow}$ links-kohärent

ANMERKUNG Obige Begriffe und Aussagen lassen sich ohne weiteres auch für Kategorien $\mathcal{C} = \mathrm{Add}(\mathcal{A}^{op}, Ab)$ formulieren und beweisen, wobei $\mathcal{A}$ eine kleine additive Kategorie ist.

Da für e.e.proj. R-Links (bzw.Rechts)-Moduln P der natürliche R-Homomorphismus $P \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(\mathrm{Hom}_R(P,R),R)$ ein Isomorphismus ist, liefert der Funktor $\mathrm{Hom}(\cdot,R): (R\text{-Mod})^{op} \longrightarrow \text{Mod-}R$ eine Äquivalenz $\underline{e\,e\,proj}_L{}^{op} \longrightarrow \underline{e\,e\,proj}_R$. Daher gilt:

$\underline{e\,e\,proj}_L$ hat Kerne $\Longleftrightarrow$ $\underline{e\,e\,proj}_R$ hat Cokerne,
(die nicht mit den in Mod-R gebildeten Cokernen übereinzustimmen brauchen).

II.6.4. LEMMA $\underline{e\,e\,proj}_L$ habe Kerne. Dann gilt:

i) X flach in Mod-R $\Longleftrightarrow$ $(X \otimes \cdot)/\underline{e\,e\,proj}_L$ linksexakt (II.6.1.)

$\Longleftrightarrow$ $\mathrm{Hom}(\cdot, X)/\underline{e\,e\,proj}_R{}^{op}$ linksexakt (II.6.2.)

ii) M h.i. in R-Mod $\Longleftrightarrow$ $(\cdot \otimes M)/\underline{e\,e\,proj}_R$ rechtsexakt (II.6.2.)

$\Longleftrightarrow$ $\mathrm{Hom}(\cdot, M)/\underline{e\,e\,proj}_L{}^{op}$ rechtsexakt (II.6.1.)

BEWEIS mit II.6.1., II.6.2. und II.4.8. Die Cokerne in $\underline{e\,e\,proj}_R$ stimmen dabei i.a. nicht mit den in Mod-R gebildeten überein.

II.6.5. BEMERKUNG $\underline{e\,e\,proj}_R$ hat Cokerne $\Longleftrightarrow$ $\underline{e\,e\,proj}_R$ reflektiv in $\underline{e\,p}_R$

BEWEIS Zu e.p. E wähle man eine e.e.proj. Auflösung

$P_1 \xrightarrow{f} P_2 \xrightarrow{g} E \to 0$ a) Ist $(c,P) = \mathrm{cok}\, f$ in $\underline{e\,e\,proj}_R$, so exist. genau ein v_E, so daß das Diagramm kommutiert.

v_E ist Reflexion von E in $\underline{e\,e\,proj}_R$.

b) Ist umgekehrt v_E Reflexion von E in $\underline{e\,e\,proj}_R$, so ist $(v_E \circ g, P) = \mathrm{cok}\, f$ in $\underline{e\,e\,proj}_R$.

II.6.6. FOLGERUNG $\underline{e\,e\,proj}_L$ habe Kerne . Dann hat jedes e.p. E in Mod-R eine Reflexion $v_E : E \longrightarrow P_E$ in $\underline{e\,e\,proj}_R$, und es gelten :

i) F flach in Mod-R $\Longleftrightarrow$ $\mathrm{Hom}(v_E, F)$ Isomorphismus für jedes e.p. E

ii) M h.i. in R-Mod $\Longleftrightarrow$ $v_E \otimes M$ Isomorphismus für jedes e.p. E

II.6.7. KOROLLAR $\underline{e\,e\,proj}_L$ habe Kerne . Dann gilt :

i) Limites (bzw. Produkte und Kerne) flacher R-Rechts-Moduln sind wieder flach.

ii) Colimites (bzw. filtr. Colimites und Cokerne) halbinjektiver R-Links-Moduln sind wieder halbinjektiv.

BEWEIS Limites bewahren Kerne, Colimites bewahren Cokerne. Die Äquivalenzen II.6.1. und II.6.2. bewahren Limites und Colimites.

II.6.8. KOROLLAR Es gelten die Äquivalenzen :

i) $\underline{e\,e\,proj}_L$ hat Kerne und $\underline{inj} \subset \underline{flach}$ (bzw. ein injektiver Cogenerator ist flach) in Mod-R $\Longleftrightarrow$ R v.Neumann regulär .

ii) $\underline{e\,e\,proj}_L$ hat Kerne und $\underline{proj} \subset \underline{h.i.}$ (bzw. R h.i.) in R-Mod $\Longleftrightarrow$ R v.Neumann regulär .

ZUSATZ Ersetzt man die Inklusionen durch Gleichheitszeichen, so hat man "v.Neumann regulär" bei obigen Äquivalenzen durch "halbeinfach" zu ersetzen .

BEWEIS " $\Longleftarrow$ " trivial. " $\Longrightarrow$ " folgt aus II.6.7. unter Verwendung injektiver oder freier Auflösungen.

BEMERKUNG Bekanntlich gilt die Äquivalenz : R links-kohärent $\Longleftrightarrow$ Produkte flacher R-Rechts-Moduln sind flach (Chase[3]) $\Longleftrightarrow$ filtrierende Colimites h.i. R-Links-Moduln sind h.i. (Stenström[22])

Daher liefern sowohl i) als auch ii) von II.6.7. einen Beweis der Implikation $*$.

Sowohl i) als auch ii) von II.6.7. charakterisieren die links-kohärenten Ringe mit $\mathrm{glwdim} \leq 2$. Für Aussage i) ist dies trivial . Für Aussage ii) ergibt sich dies, indem man beachtet, daß für links-kohärente Ringe die glwdim mit Hilfe halbinjektiver Auflösungen von Links-Moduln (analog der gl inj dim) definiert werden kann ([22]) . Darüber hinaus erhält man den

II.6.9. SATZ Für einen Ring R sind äquivalent:

i) Limites flacher R-Rechts-Moduln sind flach.

ii) Colimites h.i. R-Links-Moduln sind h.i. .

iii) R links-kohärent und $\mathrm{glwdim}(R) \leq 2$.

iv) $\underline{\mathrm{e.e.proj}}_L$ hat Kerne .

v) $\underline{\mathrm{e.e.proj}}_R$ hat Cokerne .

vi) $\underline{\mathrm{e.e.proj}}_R$ ist reflektiv in $\underline{\mathrm{e.p.}}_R$.

BEWEIS Die Äquivalenz der Aussagen i , ii , iii ist Inhalt der vorangegangenen Bemerkung. Die Äquivalenz der Aussagen iv , v , vi ist in der Lemma II.6.4. vorangehenden Bemerkung und in II.6.5. begründet. iv $\Longrightarrow$ i ist Korollar II.6.7. Um iii $\Longrightarrow$ iv zu zeigen., beachte man , daß die glwdim sowohl mit Hilfe flacher Auflösungen von Rechts-Moduln als auch mit Hilfe flacher Auflösungen von Links-Moduln definiert werden kann . Daher ergibt sich aus Aussage iii : Kerne flacher R-Links-Moduln sind flach . Insbesondere sind Kerne e.e.projektiver R-Links-Moduln flach , aber auch e.p. (weil $\underline{\mathrm{e.p.}}_L$ abgeschlossen gegen Bildung von Kernen , da R links-kohärent) , folglich e.e.projektiv .

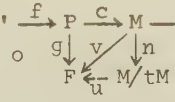
Satz II.6.9. ist analog der folgenden bekannten Charakterisierung links-halberblicher Ringe : R links-halberblich $\Longleftrightarrow$ $\underline{\mathrm{e.e.proj}}_L$ abgeschlossen gegen Bildung endl.erz. Unterobjekte $\Longleftrightarrow$ R links-kohärent und $\mathrm{glwdim}(R) \leq 1$

Für den Fall, daß R links-halberblich ist, sollen die Cokerne in $\underline{\mathrm{e.e.proj}}_R$ explizit angegeben werden . Die Konstruktion findet sich schon bei Lenzing[10] , jedoch unter der Voraussetzung, daß R links- und rechts-halberblich ist, was bei dem hier gegebenen Beweis nicht benötigt wird .

Ein R-Rechts-Modul T heiße Torsionsmodul , wenn $T \otimes_R I = 0$ für jeden injektiven R-Links-Modul I . Ist R links-halberblich, so existiert zu jedem R-Rechts-Modul M ein kleinster Untermodul tM , so daß M/tM flach ist ; tM ist dabei Torsionsmodul ([10]) . $(\mathcal{T}, \underline{\mathrm{flach}}_R)$ ist eine Torsionstheorie für Mod-R im Sinne von Dickson[4] ; $\mathcal{T}$ = Klasse der Torsionsmoduln von Mod-R . Insbesondere ist $\mathrm{Hom}(tM,F) = 0$, wenn F flach ist .

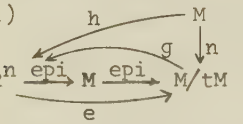
II.6.10. LEMMA R sei links-halberblich.
$P' \xrightarrow{f} P$ in $\underline{e\,e\,proj}_R$, $M = \operatorname{cok} f$ in Mod-R
$\Longrightarrow M/tM = \operatorname{cok} f$ in $\underline{e\,e\,proj}_R$. Genauer gilt:
i) $P' \longrightarrow P$ in $\underline{flach}_R$, $M = \operatorname{cok} f$ in Mod-R
$\Longrightarrow M/tM = \operatorname{cok} f$ in $\underline{flach}_R$
ii) M endlich präsentiert $\Longrightarrow$ M/tM projektiv

BEWEIS i) $P' \xrightarrow{f} P \xrightarrow{c} M \longrightarrow 0$ exakt in Mod-R, P', P flach



F sei flach und $g \circ f = o \Longrightarrow$ v existiert mit $v \circ c = g$
F flach, tM Torsionsmodul $\Longrightarrow v/tM = o \Longrightarrow$ u existiert mit $u \circ n = v$
$\Longrightarrow u \circ (n \circ c) = g$. Die Eindeutigkeit von u ist trivial.

ii)



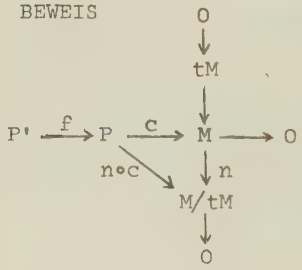
M/tM flach $\Longrightarrow$ e rein-epi $\Longrightarrow$
M endlich präsentiert
h existiert mit $e \circ h = n$
R^n flach, tM Torsionsmodul $\Longrightarrow$
$h/tM = o \Longrightarrow$ g exist.mit $g \circ n = h$

$e \circ g \circ n = e \circ h = n$, n epi $\Longrightarrow e \circ g = 1_{M/tM} \Longrightarrow$
M/tM direkter Faktor von R^n, also projektiv.

Da $(\mathcal{T}, \underline{flach}_R)$ eine Torsionstheorie für Mod-R ist, wenn R links-halberblich ist, gilt:
C flach in Mod-R $\Longleftrightarrow \operatorname{Hom}(T,C) = 0$ für jeden Torsionsmodul T.
Jetzt erhält man aus Lemma II.6.4. oder aus II.6.6.

II.6.11. SATZ R sei links-halberblich. Dann gilt:
i) X flach in Mod-R $\Longleftrightarrow \operatorname{Hom}(tM,X) = 0$ für jeden e.p. R-Rechts-Modul M.
ii) Y h.i. in R-Mod $\Longleftrightarrow tM \otimes Y = 0$ für jeden e.p. R-Rechts-Modul M.

BEWEIS



In dem nebenstehenden Diagramm mit exakter Zeile in Mod-R seien P', P e.e.proj. (also M e.p.). Dann ist $(n \circ c, M/tM) = \operatorname{cok} f$ in $\underline{e\,e\,proj}_R$. Die Spalte ist exakt-direkt in Mod-R.

i) $\mathrm{Hom}(\cdot,X)$: Mod-R $\longrightarrow$ Ab ist linksexakt.
X flach in Mod-R $\Longleftrightarrow$ $\mathrm{Hom}(\cdot,X)/\underline{e\,e\,proj}_R{}^{op}$ linksexakt (II.6.4.
Daraus folgt alles, da die Spalte exakt-direkt ist.
ii) $\cdot\otimes Y$: Mod-R $\longrightarrow$ Ab rechtsexakt.
Y h.i. in R-Mod $\Longleftrightarrow$ $(\cdot\otimes Y)/\underline{e\,e\,proj}_R$ rechtsexakt (II.6.4.)
Daraus folgt alles, da die Spalte exakt-direkt ist.

BEMERKUNG Vermöge "$X\,\tau\,Y \Longleftrightarrow X\otimes_R Y=0$" wird eine Relation τ zwischen Mod-R und R-Mod definiert, die eine Galois-Korrespondenz zwischen den "Verbänden" der Teilklassen von Mod-R und R-Mod liefert (Szasz[23]).
Ist R links-halberblich, so ist wegen Satz II.6.11.:
Y h.i. in R-Mod $\Longleftrightarrow$ $T\otimes_R Y=0$ für jeden Torsionsmodul T.
("$\Longrightarrow$" gilt, weil h.i. Moduln reine Untermoduln von Injektiven sind), folglich $\underline{h.i.}$ = Hülle von $\underline{inj}$ in R-Mod bei obiger Galois-Korrespondenz. Es gilt der

II.6.12. SATZ R links-halberblich $\Longleftrightarrow$
$\underline{h.i.}$ = Hülle von $\underline{inj}$ in R-Mod bei der durch die Relation "$X\,\tau\,Y \Longleftrightarrow X\otimes_R Y=0$" gegebenen Galois-Korrespondenz zwischen den "Verbänden" der Teilklassen von Mod-R und R-Mod.

BEWEIS "$\Longrightarrow$" ist der Inhalt der vorangegangenen Bemerkung.
"$\Longleftarrow$" Sei $\underline{h.i.}$ = Hülle von $\underline{inj}$ in R-Mod.
Sei $H \longrightarrow Q \longrightarrow 0$ exakt in R-Mod, H halbinjektiv
$T\otimes H \longrightarrow T\otimes Q \longrightarrow 0$ exakt für jeden Torsionsmodul T.
Da $T\otimes H=0$, folgt $T\otimes Q=0$ für jeden Torsionsmodul T;
nach Voraussetzung ist dann Q halbinjektiv. Damit ist gezeigt, Quotienten halbinjektiver R-Links-Moduln sind h.i., folglich ist R links-halberblich (nach einem Kriterium von Megibben[16])

BEMERKUNG Es gilt stets $\underline{inj} \subset \underline{h.i.} \subset$ Hülle von $\underline{inj}$.
Außerdem gilt bekanntlich: R links-noethersch $\Longleftrightarrow$ $\underline{inj} = \underline{h.i.}$ in R-Mod (Megibben[16]). Daraus folgt das

II.6.13. KOROLLAR R links-noethersch und links-erblich $\Longleftrightarrow$ $\underline{inj}$ = Hülle von $\underline{inj}$ in R-Mod, d.h. $\underline{inj}$ ist abgeschlossen in R-Mod, bezüglich der durch die Relation "$X\,\tau\,Y \Longleftrightarrow X\otimes_R Y=0$" gegebenen Galois-Korrespondenz.

BEWEIS R links-noethersch und links-erblich $\Longleftrightarrow$
R links-noethersch und links-halberblich $\Longleftrightarrow$
$\underline{inj} = \underline{h.i.}$ und $\underline{h.i.}$ = Hülle von $\underline{inj}$ in R-Mod $\Longleftrightarrow$
$\underline{inj}$ = Hülle von $\underline{inj}$ in R-Mod .

III. Tensorprodukte bei lokal endlich präsentierbaren Kategorien

III.1. Vorbemerkung über lokal endlich präsentierbare Kategorien

Im folgenden sei $\mathcal{C}$ stets eine covollständige, additive Kategorie. Es gelte auch hier die Definition II.4.1. , d.h. ein Objekt $E \in |\mathcal{C}|$ heiße endlich präsentiert (endlich erzeugt) , wenn der Funktor $\mathrm{Hom}(E,\cdot) : \mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{Ab}$ filtrierende Colimites (filtrierende Vereinigungen) bewahrt. Dann gilt auch hier : e.p. $\Longrightarrow$ e.e. $\Longrightarrow$ klein .. e.p. ist abgeschlossen gegen Bildung endlicher Colimites in $\mathcal{C}$. Filtrierende Colimites werden im folgenden mit $\varinjlim$ bezeichnet .

III.1.1. DEFINITION Eine covollständige, additive Kategorie $\mathcal{C}$ mit einer Generatormenge $\mathcal{G}$ von e.p. Objekten wird als lokal endlich präsentierbare Kategorie bezeichnet .

$\mathcal{C}$ sei im folgenden lokal endlich präsentierbar . $\mathcal{A}$ sei der Abschluß von $\mathcal{G}$ bezüglich der Bildung endlicher Colimites in $\mathcal{C}$ (Standardverfahren , Freyd[7]) . Die Generatormengen $\mathcal{G}$ und $\mathcal{A}$ seien festgewählt .

Ein Epimorphismus g in $\mathcal{C}$ heiße reiner Epimorphismus , wenn für jedes $E \in |\mathcal{A}|$ $\mathrm{Hom}(E,g)$ ein Epimorphismus ist .

Für den Fall , daß $\mathcal{C}$ überdies Kerne hat, nenne man die Sequenz $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$ exakt , wenn $f = \mathrm{Ker}\, g$ und g epi ist . Man nenne die Sequenz $X \xrightarrow{\alpha} Y \xrightarrow{\beta} Z \longrightarrow 0$ exakt , wenn α eine epi-Kerβ-Faktorisierung $X \xrightarrow{\alpha} Y$ mit $e \searrow \mathrm{Ker}\beta \nearrow$ hat und β epi ist .

Obige Sequenzen heißen rein-exakt , wenn überdies die Epimorphismen g , e , β reine Epimorphismen sind .

Analog erklärt man reine Epimorphismen (bez. $\mathcal{G}$) , Rein-Exaktheit (bez. $\mathcal{G}$) , indem man obige Aussagen für jedes $E \in |\mathcal{G}|$ fordert . Rein-Exaktheit ist also Rein-Exaktheit (bez. $\mathcal{A}$) . Filtrierende Colimites und Coprodukte bewahren reine Epimor-

phismen und reine Epimorphismen (bez. $\mathcal{A}$).

III.1.2. LEMMA Jedes $C \in |\mathcal{C}|$ ist reiner Quotient eines geeigneten Coprodukts von Objekten aus $\mathcal{A}$; und zwar ist der kanonische Epimorphismus $\coprod_{f \in |\mathcal{A}/C|} A_f \longrightarrow C$ ein reiner Epimorphismus. (Für $C \in |\mathcal{C}|$ bezeichne hierbei $\mathcal{A}/C$ die Komma-Kategorie im üblichen Sinn)

Wir sagen, ein Objekt $C \in |\mathcal{C}|$ sei in kanonischer Weise filtrierender Colimes von Objekten aus $\mathcal{A}$, wenn $((f)_{f \in |\mathcal{A}/C|}, C)$ der Colimes des kanonischen Vergißfunktors $V : \mathcal{A}/C \longrightarrow \mathcal{C}$ ist. ($\mathcal{A}/C$ ist filtrierend, weil $\mathcal{A}$ abgeschlossen gegen Bildung endlicher Colimites in $\mathcal{C}$ ist. $\mathcal{A}/C$ ist nicht notw. filtrierend)

III.1.3. LEMMA Für die folgenden Bedingungen an die Generatormenge $\mathcal{A}$ gilt $A \Longrightarrow B' \Longrightarrow B \Longrightarrow C \Longrightarrow C'$

A) $\bigwedge_{h \in \mathcal{C}} h$ rein-epi und mono $\Longrightarrow$ h Isom. ; d.h. die Generatormenge $\mathcal{A}$ ist echt im Sinne von Gabriel, Ulmer [9].

B') Jedes $C \in |\mathcal{C}|$ ist in kanonischer Weise filtr. Colimes von Objekten aus $\mathcal{A}$ (d.h. $\mathcal{A}$ ist dicht in $\mathcal{C}$).

B) Jedes $C \in |\mathcal{C}|$ ist filtr. Colimes von Objekten aus $\mathcal{A}$.

C) $\mathcal{A}$ ist repräsentativ für e p ; d.h. jedes e.p. E ist isomorph zu einem geeigneten $A \in |\mathcal{A}|$.

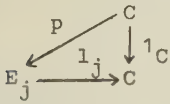
C') Rein-Exaktheit (bez. $\mathcal{A}$) stimmt überein mit Rein-Exaktheit (bez. e p)

BEWEIS $A \Longrightarrow B'$ Ist $C \in |\mathcal{C}|$, so ist $I = \mathcal{A}/C$ filtrierend. Bezeichnet $V : I \longrightarrow \mathcal{C}$ den zugehörigen Vergißfunktor, so ist $((\mathrm{Hom}(E,f))_{f \in |I|}, \mathrm{Hom}(E,C)) = \varinjlim \mathrm{Hom}(E,\cdot) \circ V$ für jedes $E \in |\mathcal{A}|$ (Lemma 5 des später folgenden Paragraphen III.3.). Ist $((u_f)_{f \in |I|}, L) = \varinjlim V$, so ist für jedes $E \in |\mathcal{A}|$ $((\mathrm{Hom}(E,u_f))_{f \in |I|}, \mathrm{Hom}(E,L)) = \varinjlim \mathrm{Hom}(E,\cdot) \circ V$.

Sei $h : L \longrightarrow C$ der eindeutige Morphismus mit $h \circ u_f = f$ für jedes $f \in |I|$. Dann ist $\mathrm{Hom}(E,h) \circ \mathrm{Hom}(E,u_f) = \mathrm{Hom}(E,f)$, folglich $\mathrm{Hom}(E,h)$ ein Isomorphismus für jedes $E \in |\mathcal{A}|$, und h ist rein-epi und mono, nach Voraussetzung also ein Isomorphismus.

$B' \Longrightarrow B$ ist trivial.

$B \Longrightarrow C$ Sei C e.p. in $\mathcal{C}$. Nach Vorauss. ist $C = \varinjlim E_j$, $E_j \in |\mathcal{A}|$ für jedes j . Da Hom(C,·) filtrierende Colimites bewahrt , gibt es für geeignetes j ein kommutatives Diagramm



(Lemma 5 von III.3.). Ein üblicher Schluß zeigt $(1_j, C) = \mathrm{cok}(1_{E_j} - p \circ 1_j)$. $\Longrightarrow$ $C \in |\mathcal{A}|$ bis auf Isomorphie.

$C \Longrightarrow C'$ ist trivial .

BEMERKUNG Ist $\mathcal{C}$ balanciert, so ist A) trivialerweise erfüllt. Ist $\mathcal{C}$ exakt (also abelsch), so stimmt der hier vereinbarte Exaktheitsbegriff mit dem üblichen überein. Gilt C') , so stimmt der hier gegebene Rein-Exaktheits-Begriff ebenfalls mit dem üblichen überein. Daher sind insbesondere für eine cov., abelsche Kategorie $\mathcal{C}$ mit Generatormenge $\mathcal{A}$ von klein-projektiven Objekten die hier vereinbarten Begriffe mit den in II.3., II.4. definierten identisch.

Die Begriffe "rein-projektiv", "flach", "halbinjektiv" lassen sich ebenfalls auf lokal endlich präsentierbare Kategorien übertragen: $P \in |\mathcal{C}|$ heiße rein-projektiv, wenn für jeden reinen Epimorphismus e in $\mathcal{C}$ auch Hom (P,e) ein Epimorphismus in Ab ist. Äquivalent dazu ist, daß für jede rein-exakte Sequenz $\mathcal{E}$ in $\mathcal{C}$ auch $\mathrm{Hom}(P, \mathcal{E})$ exakt in Ab ist. Zur Definition von Flachheit und Halbinjektivität wird II.4.3. wortwörtlich übernommen.

III.1.4. LEMMA Es gelten folgende Aussagen:

a) $\coprod_{i \in I} P_i$ rein-projektiv $\Longleftrightarrow$ P_i rein-projektiv für jedes $i \in I$

b) Coprodukte von Objekten aus $\mathcal{A}$ sind rein-projektiv .

c) Zu jedem $C \in |\mathcal{C}|$ existiert eine rein-exakte Sequenz $P_2 \longrightarrow P_1 \longrightarrow C \longrightarrow 0$, wobei P_i rein-projektiv (<u>rein-projektive Auflösung</u>) . Und zwar erhält man mit Hilfe von Lemma III.1.2. eine kanonische rein-projektive Auflösung . ($\mathcal{C}$ habe Kerne)

d) P rein-projektiv $\Longleftrightarrow$ P ist direkter Faktor eines geeigneten Coprodukts von Objekten aus $\mathcal{A}$.

BEMERKUNG Für die folgenden Bedingungen an die Generatormenge $\mathcal{A}$ gilt $D \Longleftrightarrow E \Longleftrightarrow F$ (wenn $\mathcal{C}$ Kerne hat)

D) Jeder reine Epimorphismus ist Cokern.

E) Für jede rein-exakte Sequenz der Form $X \xrightarrow{\alpha} Y \xrightarrow{\beta} Z \longrightarrow 0$ gilt $\beta = \operatorname{cok} \alpha$.

F) Für kanonische rein-projektive Auflösungen $P_2 \xrightarrow{\alpha} P_1 \xrightarrow{\beta} C \longrightarrow 0$ gilt $\beta = \operatorname{cok} \alpha$.

III.1.5. BEMERKUNG Bis auf Lemma III.1.3. gelten alle Aussagen dieses Paragraphen auch für Rein-Exaktheit (bez. $\mathcal{G}$) und Rein-Projektivität (bez. $\mathcal{G}$). Insbesondere bewahren filtr. Colimites und Coprodukte reine Epimorphismen (bez. $\mathcal{G}$), ist $\coprod_{f \in |\mathcal{G}/C|} A_f \longrightarrow C$ ein reiner Epimorphismus (bez. $\mathcal{G}$), existieren kanonische rein-projektive Auflösungen (bez. $\mathcal{G}$), wenn $\mathcal{C}$ Kerne hat.

Ferner gilt, wenn $\mathcal{G} \subset \mathcal{A} \subset \underline{ep}$:
Rein-Exaktheit (bez. $\underline{ep}$) $\Longrightarrow$ Rein-Exaktheit (bez. $\mathcal{A}$) $\Longrightarrow$ Rein-Exaktheit (bez. $\mathcal{G}$).

III.2. Kategorien linksexakter Funktoren

$\mathcal{A}$ sei in diesem Paragraphen eine kleine additive Kategorie mit endlichen Colimites (d.h. endlichen Coprodukten und Cokernen). $\operatorname{Lex}(\mathcal{A}^{op}, Ab)$ bezeichne die Kategorie aller linksexakten Funktoren von $\mathcal{A}^{op}$ nach Ab. Im folgenden seien wichtige Eigenschaften von $\operatorname{Lex}(\mathcal{A}^{op}, Ab)$ zusammengestellt:

III.2.1. $\operatorname{Lex}(\mathcal{A}^{op}, Ab)$ ist additiv.

III.2.2. $\operatorname{Lex}(\mathcal{A}^{op}, Ab)$ ist abgeschlossen gegen Bildung von Limites in $\operatorname{Add}(\mathcal{A}^{op}, Ab)$, also vollständig.

III.2.3. $\operatorname{Lex}(\mathcal{A}^{op}, Ab)$ ist reflektive Unterkategorie von $\operatorname{Add}(\mathcal{A}^{op}, Ab)$, folglich covollständig. Der Reflektor $R : \operatorname{Add}(\mathcal{A}^{op}, Ab) \longrightarrow \operatorname{Lex}(\mathcal{A}^{op}, Ab)$ soll explizit angegeben werden, da er später benötigt wird. Die hier gegebene Konstruktion findet sich bei Brune[2].

Ist E e.p. in $\operatorname{Add}(\mathcal{A}^{op}, Ab)$, so gibt es $f : A \longrightarrow B$ in $\mathcal{A}$, so daß $[\cdot, A] \longrightarrow [\cdot, B] \longrightarrow E \longrightarrow 0$ exakt in $\operatorname{Add}(\mathcal{A}^{op}, Ab)$ (II.4.)

Es gibt dann eine exakte Sequenz $A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$ in $\mathcal{A}$ (d.h. $C = \operatorname{cok} f$) und genau ein $u_E : E \longrightarrow [\cdot, C]$, so daß das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} [\cdot,A] & \longrightarrow & [\cdot,B] & \longrightarrow & E \longrightarrow 0 \\ \| & & \| & & \downarrow u_E \\ [\cdot,A] & \longrightarrow & [\cdot,B] & \longrightarrow & [\cdot,C] \end{array} \qquad *$$

kommutativ wird.

Ist $F \in \operatorname{Lex}(\mathcal{A}^{op}, Ab)$, so wendet man auf dieses Diagramm den Funktor $[\cdot, F]_{\operatorname{Add}(\mathcal{A}^{op}, Ab)}$ an und erhält mit Hilfe des Yoneda-Lemmas, daß $[u_E, F]$ bijektiv ist. Folglich ist $u_E : E \longrightarrow [\cdot, C]$ Reflexion von E in $\operatorname{Lex}(\mathcal{A}^{op}, Ab)$.

Ist $G \in \operatorname{Add}(\mathcal{A}^{op}, Ab)$ beliebig, so ist G filtr. Colimes von e.p. Objekten (weil für Rein-Exaktheit bez. $\underline{e\,p}$ in $\operatorname{Add}(\mathcal{A}^{op}, Ab)$ z.B. III.1.3.A erfüllt ist, da $\operatorname{Add}(\mathcal{A}^{op}, Ab)$ balanciert). $G = \varinjlim_I E_i$, E_i e.p., $u_{E_i} : E_i \longrightarrow [\cdot, C_i]$ Reflexion von E_i in $\operatorname{Lex}(\mathcal{A}^{op}, Ab)$. $u_G \underset{\text{def.}}{=} \varinjlim_I u_{E_i} : G = \varinjlim_I E_i \longrightarrow \varinjlim [\cdot, C_i]$ ist dann Reflexion von G in $\operatorname{Lex}(\mathcal{A}^{op}, Ab)$.

Da $\operatorname{Lex}(\mathcal{A}^{op}, Ab) = \underline{\text{flach}}$ in $\operatorname{Add}(\mathcal{A}^{op}, Ab)$, erhält man das

LEMMA $\mathcal{A}$ sei additiv mit endlichen Coprodukten. Für die folgenden Aussagen gilt $i \Longleftrightarrow ii \Longrightarrow iii \Longleftrightarrow iv \Longleftrightarrow v$

i) $\mathcal{A}$ hat Cokerne.
ii) $\mathcal{A}$ ist reflektiv in $\underline{e\,p} \subset \operatorname{Add}(\mathcal{A}^{op}, Ab)$.
iii) $\underline{\text{flach}}$ ist reflektiv in $\operatorname{Add}(\mathcal{A}^{op}, Ab)$.
iv) $\underline{\text{flach}}$ hat Colimites (die nicht mit den in $\operatorname{Add}(\mathcal{A}^{op}, Ab)$ gebildeten Colimites übereinzustimmen brauchen).
v) $\underline{\text{flach}}$ hat Cokerne (die nicht mit den in $\operatorname{Add}(\mathcal{A}^{op}, Ab)$ gebildeten Cokernen übereinzustimmen brauchen).

BEWEIS $ii \Longleftrightarrow i \Longrightarrow iii \Longrightarrow iv \Longrightarrow v$ ist trivial. $ii \Longleftarrow i$ ist dabei analog zu II.6.5., $v \Longrightarrow iii$ ebenfalls analog zu II.6.5.

III.2.4. $\operatorname{Lex}(\mathcal{A}^{op}, Ab)$ ist abgeschlossen gegen Bildung filtrierender Colimites (also auch gegen Bildung von Coprodukten) in $\operatorname{Add}(\mathcal{A}^{op}, Ab)$. Daher gilt für $F \in \operatorname{Lex}(\mathcal{A}^{op}, Ab)$:
F e.p. (klein) in $\operatorname{Add}(\mathcal{A}^{op}, Ab) \Longrightarrow$ F e.p.(klein) in $\operatorname{Lex}(\mathcal{A}^{op}, Ab)$

Folglich ist $\mathcal{A} \cong \{[\cdot, A] \mid A \in |\mathcal{A}|\}$ Generatormenge von e.p. Objekten für $\mathrm{Lex}(\mathcal{A}^{op}, Ab)$, und $\mathrm{Lex}(\mathcal{A}^{op}, Ab)$ ist lokal endlich präsentierbar.

III.2.5. Da filtrierende Colimites und Coprodukte in $\mathrm{Add}(\mathcal{A}^{op}, Ab)$ exakt sind, sind wegen III.2.2. und III.2.4. filtrierende Colimites und Coprodukte in $\mathrm{Lex}(\mathcal{A}^{op}, Ab)$ exakt (d.h. bewahren Kerne und Cokerne).

Insbesondere sind filtrierende Colimites und Coprodukte in $\mathrm{Lex}(\mathcal{A}^{op}, Ab)$ exakt im Sinn von III.1. (d.h. bewahren Kerne und Epimorphismen).

III.2.6. Die Yoneda-Einbettung $\mathcal{A} \longrightarrow \mathrm{Lex}(\mathcal{A}^{op}, Ab)$ ist rechtsexakt (d.h. bewahrt Cokerne).

BEWEIS Sei $A' \longrightarrow A \longrightarrow A'' \longrightarrow 0$ exakt in $\mathcal{A}$ (d.h. Cokern).

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & F(A'') & \longrightarrow & F(A) & \longrightarrow & F(A') \\ & & \| & & \| & & \| \\ 0 & \longrightarrow & [[\cdot, A''], F] & \longrightarrow & [[\cdot, A], F] & \longrightarrow & [[\cdot, A'], F] \end{array}$$

ist für jedes $F \in \mathrm{Lex}(\mathcal{A}^{op}, Ab)$ kommutativ (Yoneda-Lemma) mit exakten Zeilen. Daher ist $[\cdot, A''] \longrightarrow [\cdot, A] \longrightarrow [\cdot, A'] \longrightarrow 0$ exakt in $\mathrm{Lex}(\mathcal{A}^{op}, Ab)$ (d.h. Cokern).

III.2.7. Da $\mathcal{A}$ eine gegen Bildung endlicher Colimites in $\mathrm{Lex}(\mathcal{A}^{op}, Ab)$ abgeschlossene Generatormenge endlich präsentierter Objekte von $\mathrm{Lex}(\mathcal{A}^{op}, Ab)$ ist, lassen sich die Definitionen von III.1. auf $\mathcal{C} = \mathrm{Lex}(\mathcal{A}^{op}, Ab)$ und $\mathcal{A}$ anwenden. Man erhält das

LEMMA Für einen Morphismus $F \xrightarrow{\beta} F''$ in $\mathcal{C} = \mathrm{Lex}(\mathcal{A}^{op}, Ab)$ sind äquivalent:

i) β ist rein-epi in $\mathrm{Lex}(\mathcal{A}^{op}, Ab)$ (Reinheit bez. $\mathcal{A}$).
ii) β ist punktweise epi für jedes $A \in |\mathcal{A}|$.
iii) β ist epi in $\mathrm{Add}(\mathcal{A}^{op}, Ab)$.
iv) β ist rein-epi in $\mathrm{Add}(\mathcal{A}^{op}, Ab)$ (gewöhnliche Reinheit).

BEWEIS β rein-epi in $\mathrm{Lex}(\mathcal{A}^{op}, Ab) \iff$
$[[\cdot, A], \beta]$ ist epi in Ab für jedes $A \in |\mathcal{A}| \iff$
β_A epi in Ab für jedes $A \in |\mathcal{A}|$ (Yoneda-Lemma) $\iff$
β epi in $\mathrm{Add}(\mathcal{A}^{op}, Ab) \iff \beta$ rein-epi in $\mathrm{Add}(\mathcal{A}^{op}, Ab)$,
(weil $F'' \in \mathrm{Lex}(\mathcal{A}^{op}, Ab) = \underline{\text{flach}}$ in $\mathrm{Add}(\mathcal{A}^{op}, Ab)$)

KOROLLAR Für eine Sequenz $\mathcal{E} : 0 \to F' \xrightarrow{\alpha} F \xrightarrow{\beta} F'' \to 0$ in $\mathcal{E} = \mathrm{Lex}(\mathcal{A}^{op}, Ab)$ sind äquivalent:

i) $\mathcal{E}$ rein-exakt in $\mathrm{Lex}(\mathcal{A}^{op}, Ab)$.
ii) $\mathcal{E}$ punktweise exakt für jedes $A \in |\mathcal{A}|$.
iii) $\mathcal{E}$ exakt in $\mathrm{Add}(\mathcal{A}^{op}, Ab)$.
iv) $\mathcal{E}$ rein-exakt in $\mathrm{Add}(\mathcal{A}^{op}, Ab)$.

BEWEIS $\mathcal{E}$ rein-exakt in $\mathcal{E} = \mathrm{Lex}(\mathcal{A}^{op}, Ab) \iff$
$\alpha = \mathrm{Kern}\,\beta$, β rein-epi in $\mathrm{Lex}(\mathcal{A}^{op}, Ab) \iff$
$\alpha = \mathrm{Kern}\,\beta$, β epi in $\mathrm{Add}(\mathcal{A}^{op}, Ab)$.

III.2.8. FOLGERUNG a) Für $\mathcal{E} = \mathrm{Lex}(\mathcal{A}^{op}, Ab)$ und $\mathcal{A}$ gilt Aussage A von Lemma III.1.3., weil $\mathrm{Add}(\mathcal{A}^{op}, Ab)$ balanciert. Insbesondere gelten dann A, B', B, C, C' für $\mathcal{E} = \mathrm{Lex}(\mathcal{A}^{op}, Ab)$ und $\mathcal{A}$. Rein-Exaktheit (bez. $\mathcal{A}$) stimmt überein mit Rein-Exaktheit (bez. $\underline{ep}$).

b) Für eine Sequenz $\mathcal{F} : F' \xrightarrow{\alpha} F \xrightarrow{\beta} F'' \to 0$ in $\mathrm{Lex}(\mathcal{A}^{op}, Ab)$ sind äquivalent:

i) $\mathcal{F}$ rein-exakt in $\mathrm{Lex}(\mathcal{A}^{op}, Ab)$.
ii) $\beta = \mathrm{cok}\,\alpha$ in $\mathrm{Add}(\mathcal{A}^{op}, Ab)$.

ZUSATZ $\mathcal{F}$ rein-exakt in $\mathrm{Lex}(\mathcal{A}^{op}, Ab) \implies \beta = \mathrm{cok}\,\alpha$ in $\mathrm{Lex}(\mathcal{A}^{op}, Ab)$.

c) Jeder rein-epi in $\mathrm{Lex}(\mathcal{A}^{op}, Ab)$ ist Cokern in $\mathrm{Lex}(\mathcal{A}^{op}, Ab)$.

d) Filtrierende Colimites und Coprodukte bewahren rein-exakte Sequenzen in $\mathrm{Lex}(\mathcal{A}^{op}, Ab)$ (wegen III.1. und III.2.5.).

III.3. Charakterisierung lokal endlich präsentierbarer Kategorien und Fortsetzungssätze

Die Charakterisierung von Kategorien der Form $\mathrm{Lex}(\mathcal{A}^{op}, Ab)$ als covollständige, additive Kategorien $\mathcal{E}$ mit einer echten Generatormenge $\mathcal{G}$ von e.p. Objekten kann erhalten werden aus der Charakterisierung der Kategorien $St_\alpha[\mathcal{A}, Meng]$ (aller α-stetigen Funktoren von einer kleinen α-vollständigen Kategorie $\mathcal{A}$ nach Meng) von Gabriel, Ulmer[9] . Man hat dabei $\mathcal{A}$ additiv und $\alpha = \aleph_0$ zu setzen. (Die Generatormenge $\mathcal{G}$ heißt echt, wenn sie die Bedingung A von III.1.3. erfüllt). Dieser Sachverhalt soll hier in veränderten Voraussetzungen dargestellt werden. Die Bedingung A wird dabei in III.3.1. durch die Bedingung B ersetzt; in III.3.2. wird die Existenz von Kernen vorausgesetzt und Bedingung F gefordert. Wir übernehmen die Bezeichnungen von III.1.

III.3.1. SATZ $\mathcal{E}$ sei covollständig, additiv mit einer Generatormenge $\mathcal{G}$ von e.p. Objekten. Jedes $C \in |\mathcal{E}|$ sei filtrierender Colimes von Objekten aus $\mathcal{G}$.
$\Longrightarrow \quad \mathcal{E} \simeq \mathrm{Lex}(\mathcal{A}^{op}, Ab)$
($\mathcal{A}$ = Abschluß von $\mathcal{G}$ gegenüber Bildung endlicher Colimites)

III.3.2. SATZ $\mathcal{E}$ sei covollständig, additiv mit einer Generatormenge $\mathcal{G}$ von e.p. Objekten. Überdies habe $\mathcal{E}$ Kerne, und kanonische rein-projektive Auflösungen in $\mathcal{E}$ seien Cokerne.
$\Longrightarrow \quad \mathcal{E} \simeq \mathrm{Lex}(\mathcal{A}^{op}, Ab)$
($\mathcal{A}$ = Abschluß von $\mathcal{G}$ gegenüber Bildung endlicher Colimites)

BEWEIS Der Beweis von Mitchell[18] für den Fall $\mathrm{Add}(\mathcal{A}^{op}, Ab)$, d.h. für eine covollständige, abelsche Kategorie mit Generatormenge von klein-projektiver Objekten wird modifiziert. III.3.1. und III.3.2. werden gemeinsam bewiesen. In beiden Fällen werde definiert

$$T : \mathcal{E} \longrightarrow \mathrm{Lex}(\mathcal{A}^{op}, Ab)$$
$$C \longmapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(\cdot, C) \restriction \mathcal{A}^{op}$$

T bewahrt filtrierende Colimites und Coprodukte, weil $\mathcal{A} \subset \underline{e.p.}$.

Im Fall III.3.2. ist T überdies rechtsexakt auf rein-exakten Sequenzen der Form $X \xrightarrow{\alpha} Y \xrightarrow{\beta} Z \longrightarrow 0$. Nach Definition von Rein-Exaktheit (III.1.1.) ist nämlich für jedes $E \in |\mathcal{A}|$ $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\cdot, X) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\cdot, Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\cdot, Z) \longrightarrow 0$ punktweise exakt . $\Longrightarrow$ $T(X) \longrightarrow T(Y) \longrightarrow T(Z) \longrightarrow 0$ ist punktweise exakt für jedes $E \in |\mathcal{A}|$, also rein-exakt in $\mathrm{Lex}(\mathcal{A}^{op}, Ab)$ und $T(\beta) = \mathrm{cok}\, T(\alpha)$ (III.2.8.) .

Folgende Argumentation zeigt , T ist voll und treu : Man zeigt mit Hilfe des Yoneda-Lemmas, daß $T : [B,D] \longrightarrow [TB , TD]$ bijektiv ist, wenn $B \in |\mathcal{A}|$. Außerdem ist die Abbildung $T : [C,D] \longrightarrow [TC , TD]$ natürlich in C (Mitchell [18]) .

Im ersten Fall gibt es ein filtrierendes System $F : I \longrightarrow \mathcal{C}$ mit $F_i \in |\mathcal{A}|$ für alle $i \in |I|$ und $(1_i, C) = \varinjlim F$. Da der Funktor $T : \mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{Lex}(\mathcal{A}^{op}, Ab)$ filtrierende Colimites bewahrt, überführt der Funktor $[T(\cdot), TD] : \mathcal{C} \longrightarrow Ab$ filtrierende Colimites in Limites . Der Funktor $[\cdot, D] : \mathcal{C} \longrightarrow Ab$ überführt ebenfalls filtrierende Colimites in Limites . Für jedes $i \in |I|$ ist das folgende Diagramm kommutativ

$$\begin{array}{ccc} T : [C,D] & \longrightarrow & [TC , TD] \\ \downarrow{\scriptstyle [1_i, D]} & & \downarrow{\scriptstyle [T\, 1_i, TD]} \\ T : [F_i, D] & \longrightarrow & [T\, F_i, TD] \end{array}$$

und der untere Morphismus ein Isomorphismus , da $F_i \in |\mathcal{A}|$. Auf Grund der Limes-Eigenschaft ist dann auch der obere Morphismus ein Isomorphismus .

Im zweiten Fall benutzt man , daß eine kanonische rein-exakte Sequenz der Form $\coprod_{i \in I} A_i \longrightarrow \coprod_{j \in J} A_j \longrightarrow C \longrightarrow 0$ mit $A_i , A_j \in |\mathcal{A}|$ existiert . $[T(\cdot), TD]$ und $[\cdot, D]$ überführen Coprodukte in Produkte . Da T rechtsexakt auf rein-exakten Sequenzen der Form $X \longrightarrow Y \longrightarrow Z \longrightarrow 0$ ist , überführt $[T(\cdot), TD]$ diese in Kerne . Da kanonische rein-projektive Auflösungen nach Vorauss. III.3.2. Cokerne sind , überführt $[\cdot, D]$ diese ebenfalls in Kerne . Ein analoger Schluß wie im ersten Fall zeigt , $T : [C,D] \longrightarrow [TC , TD]$ ist bijektiv .

Um zu zeigen , daß T repräsentativ ist , argumentiert man in beiden Fällen mit filtrierenden Colimites : $F \in \mathrm{Lex}(\mathcal{A}^{op}, Ab) \Longrightarrow$ F flach in $\mathrm{Add}(\mathcal{A}^{op}, Ab) \Longrightarrow$ F filtr. Colimes von e.e.freien

Objekten in $\mathrm{Add}(\mathcal{A}^{op},Ab)$ (Lenzing[13]) $\Longrightarrow$ Es gibt ein filtrierendes System $D: I \longrightarrow \mathrm{Lex}(\mathcal{A}^{op},Ab)$ mit $D(i) = [\cdot, A_i]$, $A_i \in |\mathcal{A}|$ für jedes $i \in |I|$ und $F = \varinjlim D$. Dies erhält man übrigens auch aus III.2.8.a , III.1.3.

Mit Hilfe des Yoneda-Lemmas erhält man aus D ein filtrierendes System $A: I \longrightarrow \mathcal{C}$ mit $A_i \in |\mathcal{A}|$ für jedes $i \in |I|$ und $D = T \circ A$. Setzt man $Q = \varinjlim A$, so folgt

$$F = \varinjlim D = \varinjlim T \circ A \cong T(\varinjlim A) = T(Q) .$$

III.3.3. THEOREM Folgende Aussagen sind für eine Kategorie $\mathcal{C}$ äquivalent:

i) $\mathcal{C}$ ist covollständig , additiv mit einer Generatormenge $\mathcal{G}$ von e.p. Objekten, so daß jedes $C \in |\mathcal{C}|$ filtr. Colimes von Objekten aus $\mathcal{G}$ ist.

ii) $\mathcal{C}$ ist covollständig , additiv mit einer Generatormenge $\mathcal{G}$ von e.p. Objekten. $\mathcal{C}$ hat Kerne , und jede kanonische rein-projektive Auflösung ist ein Cokern .
(Rein-Exaktheit bez. $\mathcal{A}$, wobei $\mathcal{A}$ der Abschluß von $\mathcal{G}$ gegen Bildung endlicher Colimites in $\mathcal{C}$)

iii) Es gibt eine kleine additive Kategorie $\mathcal{A}$ mit endlichen Coprodukten und Cokernen , so daß $\mathcal{C} \simeq \mathrm{Lex}(\mathcal{A}^{op},Ab)$.

iv) $\mathcal{C}$ ist covollständig , additiv mit einer Generatormenge $\mathcal{G}$ von e.p. Objekten . $\mathcal{C}$ ist vollständig . Filtrierende Colimites in $\mathcal{C}$ sind exakt . Jeder reine Epimorphismus in $\mathcal{C}$ ist Cokern . "h rein-epi und mono $\Longrightarrow$ h Isomorphismus".
(Rein-Exaktheit bez. $\mathcal{A}$, wobei $\mathcal{A}$ der Abschluß von $\mathcal{G}$ gegen Bildung endlicher Colimites in $\mathcal{C}$)

BEWEIS i $\Longleftrightarrow$ iii , ii $\Longleftrightarrow$ iii wegen III.3.1., III.3.2. und III.2.8.
iii $\Longrightarrow$ iv wegen III.2.5., III.2.8.
iv $\Longrightarrow$ ii trivial .

III.3.4. KOROLLAR $\mathcal{C}$ erfülle die äquivalenten Bedingungen von Theorem III.3.3. Dann gelten:
a) Filtr. Colimites und Coprodukte in $\mathcal{C}$ sind exakt .
b) Filtr. Colimites und Coprodukte in $\mathcal{C}$ bewahren rein-exakte Sequenzen (bez. $\mathcal{G}$ oder $\mathcal{A}$) .

BEWEIS folgt aus III.3.3.iv und III.1.1. oder III.1.5.

Bevor wir das Theorem von Mitchell (II.3.2.) für lokal endlich präsentierbare Kategorien modifizieren, seien vier Lemmata formuliert. $\mathcal{C}$ sei dabei covollständig, additiv mit einer Generatormenge $\mathcal{G}$ von e.p. Objekten. $\mathcal{C}$ habe Kerne.

LEMMA 1 (Modifiziertes Fünfer-Lemma)

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A' & \longrightarrow & A & \longrightarrow & A'' & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle \alpha} & & \downarrow{\scriptstyle \beta} & & \downarrow{\scriptstyle \gamma} & & \\ 0 & \longrightarrow & X' & \longrightarrow & X & \longrightarrow & X'' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

sei kommutatives Diagramm in $\mathcal{C}$. Zeilen rein-exakt (bez. $\mathcal{G}$) α, γ rein-epi (bez. $\mathcal{G}$)

$\Longrightarrow$ β rein-epi (bez. $\mathcal{G}$)

BEWEIS mit Vierer-Lemma in Ab.

LEMMA 2 (Modifiziertes Neuner-Lemma)

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A' & \longrightarrow & A & \longrightarrow & A'' & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle \alpha} & & \downarrow{\scriptstyle \beta} & & \downarrow{\scriptstyle \gamma} & & \\ 0 & \longrightarrow & X' & \longrightarrow & X & \longrightarrow & X'' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

sei kommutatives Diagramm in $\mathcal{C}$. Zeilen rein-exakt (bez. $\mathcal{G}$) α, β, γ rein-epi (bez. $\mathcal{G}$)

$\Longrightarrow$ Die Kern-Sequenz ist rein-exakt (bez. $\mathcal{G}$).

BEWEIS mit Neuner-Lemma in Ab.

LEMMA 3 In dem Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} P_2 & \xrightarrow{b} & P_1 & \xrightarrow{a} & A & & \\ & & & & \downarrow{\scriptstyle f} & & \\ X_2 & \xrightarrow{d} & X_1 & \xrightarrow{c} & X & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

sei die untere Zeile rein-exakt (bez. $\mathcal{G}$), seien die P_i rein-projektiv (bez. $\mathcal{G}$) und $a \circ b = o$.

Dann gibt es Morphismen $f_i : P_i \longrightarrow X_i$, die das Diagramm kommutativ ergänzen. Ist ferner $\mathcal{C}'$ volle Unterkategorie von $\mathcal{C}$ mit $P_i, X_i \in |\mathcal{C}'|$ und $T : \mathcal{C}' \longrightarrow \mathcal{B}$ additiver Funktor in eine additive Kategorie $\mathcal{B}$ mit Cokernen, dann ist der induzierte Morphismus $\mathrm{Cokern}(T(b)) \longrightarrow \mathrm{Cokern}(T(d))$ unabhängig von der Wahl der f_i.

BEWEIS Mit den Modifizierungen "exakt" $\rightarrow$ "rein-exakt" "projektiv" $\rightarrow$ "rein-projektiv" läßt sich ein Standard-Beweis von Mitchell [17] übertragen.

BEMERKUNG Für eine Sequenz $0 \longrightarrow A \xrightarrow{u_1} B \xrightarrow{p_2} C \longrightarrow 0$ in einer additiven Kategorie sind bekanntlich äquivalent:

i) u_1 ist Coretrakt , $p_2 = \operatorname{cok} u_1$.
ii) Es gibt $p_1 : B \longrightarrow A$, $u_2 : C \longrightarrow B$ mit

$$p_j \circ u_i = \delta_{ij} \ , \quad u_1 \circ p_1 + u_2 \circ p_2 = 1_B \ .$$

iii) p_2 ist Retrakt , $u_1 = \ker p_2$.

Eine Sequenz , die diesen äquivalenten Bedingungen genügt , haben wir exakt-direkt genannt (II.5.) . Es ist dann (B , p_i) Produkt , (u_i , B) Coprodukt . Additive Funktoren bewahren exakt-direkte Sequenzen . Insbesondere sind exakt-direkte Sequenzen in $\mathcal{C}$ rein-exakt (bez. $\underline{ep}$, bez. $\mathcal{AR}$ und bez. $\mathcal{GJ}$) .

LEMMA 4 Genügt $\mathcal{C}$ den äquivalenten Bedingungen von III.3.3., so ist jede rein-exakte Sequenz der Form $0 \xrightarrow{a} X \xrightarrow{b} Y \longrightarrow Z \longrightarrow 0$ filtrierender Colimes von exakt-direkten Sequenzen . (Reinheit bez. $\mathcal{AR}$)

BEWEIS Sei $a = \ker b$, b rein-epi .
Wegen III.3.3.i ist $Z = \varinjlim_i E_i$, $E_i \in \mathcal{GJ} \subset \mathcal{AR}$. In dem Diagramm

$$\begin{array}{lccccccc} \mathcal{C}_i : & 0 \longrightarrow & X & \xrightarrow{a_i} & P_i & \xrightarrow{b_i} & E_i & \longrightarrow 0 \\ & & \| & & \downarrow & & \downarrow & \\ \mathcal{C} : & 0 \longrightarrow & X & \xrightarrow{a} & Y & \xrightarrow{b} & Z & \longrightarrow 0 \end{array}$$

ist P_i Pullback , $a_i = \ker b_i$.

Da Pullbacks in Ab Epimorphismen bewahren , ist $\operatorname{Hom}(E, b_i)$ epi für jedes $E \in |\mathcal{AR}|$, weil b rein-epi . Daher ist b_i rein-epi , und sogar Retrakt , weil $E_i \in \mathcal{GJ} \subset \mathcal{AR}$, folglich $\mathcal{C}_i$ exakt-direkt .

Da filtrierende Colimites in $\mathcal{C}$ rein-exakte Sequenzen bewahren (III.3.4.) , sind in dem folgenden kommutativen Diagramm die Zeilen rein-exakt

$$\begin{array}{lccccccc} \varinjlim \mathcal{C}_i : & 0 \longrightarrow & X & \longrightarrow & \varinjlim P_i & \longrightarrow & \varinjlim E_i & \longrightarrow 0 \\ & & \| & & \downarrow c & & \| & \\ : & 0 \longrightarrow & X & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & Z & \longrightarrow 0 \end{array}$$

$\operatorname{Hom}(E, c)$ ist Isomorphismus für jedes $E \in |\mathcal{AR}|$, daher c mono und rein-epi , folglich c Isomorphismus (III.3.3.iv)

Das folgende Theorem ist eine Modifizierung des Theorems II.3.2. , das sich aus diesem Theorem als Korollar erhalten läßt .

III.3.5. THEOREM $\mathcal{C}$ sei covollständig, additiv mit einer Generatormenge $\mathcal{G}$ von e.p. Objekten. $\mathcal{C}$ habe Kerne; Coprodukte seien exakt (d.h. bewahren Kerne).

Ist $\mathcal{B}$ covollständige, additive Kategorie $T : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{B}$ additiver Funktor, so existiert (bis auf nat. Isomorphie) genau eine Fortsetzung $\bar{T} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{B}$ von T mit

i) $\bar{T}$ bewahrt Coprodukte,

ii) $\bar{T}$ überführt rein-exakte Sequenzen (bez. $\mathcal{G}$) der Form $X \xrightarrow{a} Y \xrightarrow{b} Z \longrightarrow 0$ in Cokerne (d.h. $\bar{T}(b) = \operatorname{cok} \bar{T}(a)$).

ZUSATZ Genügt $\mathcal{C}$ den äquivalenten Bedingungen von III.3.3., und ist $\mathcal{G}$ schon abgeschlossen gegen Bildung endlicher Colimites in $\mathcal{C}$ (d.h. $\mathcal{G} = \mathcal{A}$), so sind i und ii zusammen äquivalent zu iii) T ist additiv und bewahrt filtrierende Colimites.

BEMERKUNG Genügt $\mathcal{C}$ den äquivalenten Bedingungen von III.3.3. und ist $\mathcal{G}$ abgeschlossen gegen Bildung endlicher Colimites, d.h. $\mathcal{G} = \mathcal{A}$, so ist $\mathcal{C} \simeq \operatorname{Lex}(\mathcal{A}^{op}, Ab)$ und man erhält $\bar{T} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{B}$ aus dem Theorem von Mitchell (Th.III.3.2.) durch Einschränkung der costetigen Fortsetzung $\operatorname{Add}(\mathcal{A}^{op}, Ab) \longrightarrow \mathcal{B}$ auf $\operatorname{Lex}(\mathcal{A}^{op}, Ab)$. Es sind nämlich rein-exakte Sequenzen (bez. $\mathcal{A}$) der Form $X \longrightarrow Y \longrightarrow Z \longrightarrow 0$ in $\operatorname{Lex}(\mathcal{A}^{op}, Ab)$, Cokerne in $\operatorname{Add}(\mathcal{A}^{op}, Ab)$ (III.2.8.b), und $\operatorname{Lex}(\mathcal{A}^{op}, Ab)$ ist abgeschlossen gegen Bildung von Coprodukten in $\operatorname{Add}(\mathcal{A}^{op}, Ab)$.

Dieser Fall läßt sich auch auf Aussagen von Gabriel, Ulmer [9] über Kan'sche Koerweiterungen zurückführen.

BEWEIS von Theorem III.3.5. Modifikation des Mitchell'schen Beweises von II.3.2. "Rein-Exaktheit" bedeute in diesem Beweis stets "Rein-Exaktheit (bez. $\mathcal{G}$)". Jedes $C \in |\mathcal{C}|$ hat eine kanonische rein-projektive Auflösung (bez. $\mathcal{G}$)

$$\coprod_{i \in I} E_i \xrightarrow{d} \coprod_{k \in K} E'_k \longrightarrow C \longrightarrow 0 \quad , \quad E_i, E'_k \in \mathcal{G} .$$

* Definition: $\bar{T}(\coprod_{i \in I} E_i) = \coprod_{i \in I} T(E_i)$, $\bar{T}(u_j) =$ Injektion, wenn $u_j : E_j \longrightarrow \coprod_{i \in I} E_i$ Injektion

Da jedes E_i e.p. und insbesondere klein ist, kann man $\bar{T}(\alpha)$ für $\alpha : \coprod_{i \in I} E_i \longrightarrow \coprod_{k \in K} E'_k$ wie üblich definieren:

Für $j \in I$ gibt es eine endliche Teilmenge $L_j \subset K$, so daß $\alpha \circ u_j = \sum_{l \in L_j} u'_l \circ p'_l \circ \alpha \circ u_j$. $\overline{T}(\alpha)$ sei dann der eindeutig bestimmte Morphismus mit $\overline{T}(\alpha) \circ \overline{T}(u_j) = \sum_{l \in L_j} \overline{T}(u'_l) \circ T(p'_l \circ \alpha \circ u_j)$ für alle $j \in I$. Damit ist T fortgesetzt auf die volle Unterkategorie aller Coprodukte von Objekten aus $\mathcal{J}$. Zum Beweis der Funktoreigenschaft beachte man, daß für $l \notin L_j$ $p'_l \circ \alpha \circ u_j = 0$ und daher L_j vergrößert werden darf, ohne daß sich der Wert von $\overline{T}(\alpha)$ ändert. Für $\beta : \coprod_{m \in M} E''_m \longrightarrow \coprod_{i \in I} E_i$ ist

$\beta \circ u''_m = \sum_{j \in J_m} u_j \circ p_j \circ \beta \circ u''_m$ (J_m endlich, $L = \bigcup_{j \in J_m} L_j$ endlich) $\Longrightarrow$

$\alpha \circ \beta \circ u''_m = \sum_{j \in J_m} (\alpha \circ u_j) \circ (p_j \circ \beta \circ u''_m) =$

$\sum_{j \in J_m} (\sum_{l \in L} u'_l \circ p'_l \circ \alpha \circ u_j) \circ (p_j \circ \beta \circ u''_m) = \sum_{l \in L} u'_l \; p'_l \circ \alpha \circ \beta \circ u''_m$

Man zeigt dann leicht, daß $\overline{T}(\alpha \circ \beta) \circ \overline{T}(u''_m) = \overline{T}(\alpha) \circ \overline{T}(\beta) \circ \overline{T}(u''_m)$, indem man auf der rechten Seite die Summationen über J_m und L vertauscht und die Additivität von T benutzt.

Definition: $\overline{T}(C) = \operatorname{cok} \overline{T}(d)$. Für $f : C \longrightarrow C'$ definiert man $\overline{T}(f)$ mit Hilfe von Lemma 3. Damit ist $\overline{T}$ auf $\mathcal{C}$ fortgesetzt. Wegen Lemma 3 ist $\overline{T}(C)$ (bis auf nat. Isomorphie) unabhängig von der speziellen Wahl der rein-projektiven Auflösung zu C. **

Man zeigt jetzt, daß $\overline{T}$ rein-exakte Sequenzen der Form $0 \longrightarrow A' \longrightarrow A \longrightarrow A'' \longrightarrow 0$ in Cokerne überführt (Daraus folgt dann dasselbe für rein-exakte Sequenzen der Form $X \to Y \to Z \to 0$) und daß $\overline{T}$ Coprodukte bewahrt:

i) Ist $C = \coprod_{i \in I} C_i$, $P_1^i \xrightarrow{d^i} P_0^i \longrightarrow C_i \longrightarrow 0$ kanonische rein-projektive Auflösung (bez. $\mathcal{J}$) zu C_i, so ist $\coprod_{i \in I} P_1^i \xrightarrow{d} \coprod_{i \in I} P_0^i \longrightarrow C \longrightarrow 0$ rein-projektive Auflösung von C und wegen ** $\overline{T}(C) = \operatorname{cok} \overline{T}(d)$, da Coprodukte nach Voraussetzung Kerne und wegen III.1.5. reine Epimorphismen (bez. $\mathcal{J}$) bewahren. Wegen Definition * ist $\overline{T}(\coprod_{i \in I} P_1^i) = \coprod_{i \in I} \overline{T}(P_1^i)$ (Assoziativität von Coprodukten), $\overline{T}(d) = \coprod_{i \in I} \overline{T}(d^i)$. Da Cokerne Coprodukte bewahren, ist $\overline{T}(C) = \operatorname{cok} \overline{T}(d) = \coprod_{i \in I} \operatorname{cok} \overline{T}(d^i) = \coprod_{i \in I} \overline{T}(C_i)$.

ii) Sei $0 \longrightarrow A' \xrightarrow{x} A \xrightarrow{y} A'' \longrightarrow 0$ rein-exakt in $\mathcal{C}$. Man wähle

zu A' und A" kanonische rein-projektive Auflösungen $P_1' \longrightarrow P_0' \longrightarrow A' \longrightarrow 0$, $P_1'' \longrightarrow P_0'' \longrightarrow A'' \longrightarrow 0$. Man erhält das folgende kommutative Diagramm mit rein-exakten Zeilen und Spalten

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & \longrightarrow & P_1' & \longrightarrow & P_1' \amalg P_1'' & \longrightarrow & P_1'' \longrightarrow 0 \\
 & & & & \downarrow d' & & \downarrow d & & \downarrow d'' \\
 & & 0 & \longrightarrow & P_0' & \longrightarrow & P_0' \amalg P_0'' & \longrightarrow & P_0'' \longrightarrow 0 \\
 & & & & \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \downarrow \gamma \\
\mathfrak{E}: & & 0 & \longrightarrow & A' & \longrightarrow & A & \xrightarrow{y} & A'' \longrightarrow 0 \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & & & 0 & & 0 & & 0
\end{array}$$

Begründung: Da $\mathfrak{E}$ rein-exakt, P_0'' rein-projektiv, existiert δ mit $y \circ \delta = \gamma$. Damit kann β definiert werden . Wegen Lemma 1 ist β rein-epi (bez. $\mathcal{J}$) . Wegen Lemma 2 ist die zu α, β, γ gehörende Kern-Sequenz rein-exakt (bez. $\mathcal{J}$) , so daß das Verfahren iteriert werden kann .

In der Mitte steht eine rein-projektive Auflösung von A ; die P_i' , P_i'' , P_i' P_i'' sind Coprodukte von Objekten aus $\mathcal{J}$. Wegen $**$ ist $\overline{T}(A) \cong \operatorname{cok} \overline{T}(d)$. Anwendung von $\overline{T}$ auf die beiden oberen exakt-direkten Zeilen liefert wegen Definition $*$ wieder zwei exakt-direkte Sequenzen . Daher ist

$$\begin{array}{ccccccc}
\operatorname{cok} \overline{T}(d') & \longrightarrow & \operatorname{cok} \overline{T}(d) & \longrightarrow & \operatorname{cok} \overline{T}(d'') & \longrightarrow & 0 \\
\| & & \| & & \| & & \\
\overline{T}(A') & \xrightarrow{\overline{T}(x)} & \overline{T}(A) & \xrightarrow{\overline{T}(y)} & \overline{T}(A'') & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

exakt , d.h. $\overline{T}(y) = \operatorname{cok} \overline{T}(x)$.

Die Eindeutigkeit von $\overline{T}$ bis auf nat. Isomorphie ist klar .

BEWEIS des Zusatzes: " i und ii $\Longrightarrow$ iii " folgt aus der Bemerkung zu Theorem III.3.5. , da $\operatorname{Lex}(\mathcal{A}^{op}, Ab)$ abgeschlossen gegen Bildung filtrierender Colimites in $\operatorname{Add}(\mathcal{A}^{op}, Ab)$. iii $\Longrightarrow$ i ist trivial . Wegen Lemma 4 ist jede rein-exakte Sequenz (bez. $\mathcal{A}$) der Form $0 \longrightarrow X \longrightarrow Y \longrightarrow Z \longrightarrow 0$ filtr. Colimes von exakt-direkten Sequenzen . Es werde iii vorausgesetzt: Da $\overline{T}$ additiv ist , bewahrt $\overline{T}$ exakt-direkte Sequenzen und überführt diese insbesondere in Cokerne . Da $\overline{T}$ filtr. Colimites bewahrt und filtr. Colimites Cokerne bewahren , gilt iii $\Longrightarrow$ ii

III.3.6. KOROLLAR (Theorem von Mitchell , Th. II.3.2.)

Ist $\mathcal{C}$ covollständig , abelsch mit einer Generatormenge $\mathcal{G}$ von klein-projektiven Objekten , $\mathcal{B}$ covollständig , additiv und $T : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{B}$ additiver Funktor , so existiert (bis auf Isomorphie) genau eine costetige Forsetzung $\overline{T} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{B}$ von T .

BEWEIS Die Voraussetzungen von III.3.5. sind erfüllt ($\mathcal{C}$ ist Grothendieck-Kat. mit Generatormenge $\mathcal{G}$ von e.p. Objekten) . Daher existiert genau eine Fortsetzung $\overline{T} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{B}$ mit i und ii . Reine Epimorphismen (bez. $\mathcal{G}$) sind in diesem Fall alle Epimorphismen und rein-exakte Sequenzen (bez. $\mathcal{G}$) der Form $X \to Y \to Z \to 0$ gerade die gewöhnlichen Cokerne in $\mathcal{C}$. Eigenschaft ii bedeutet daher in diesem Fall Cokernverträglichkeit von $\overline{T}$. i und ii zusammen bedeuten Costetigkeit von $\overline{T}$.

Für den Fall , daß $\mathcal{G}$ abgeschlossen gegen Bildung endlicher Colimites in $\mathcal{C}$ ist , d.h. $\mathcal{G} = \mathcal{O}\mathcal{L}$, und jedes Objekt von $\mathcal{C}$ in kanonischer Weise filtrierender Colimes von Objekten aus $\mathcal{O}\mathcal{L}$ (Bedingung B' von III.1.3.) , sei noch ein direkter Beweis von Th. III.3.5. in der folgenden Fassung gegeben :

III.3.5.* SATZ $\mathcal{C}$ sei covollständig, additiv mit einer Generatormenge $\mathcal{O}\mathcal{L}$ von e.p. Objekten . $\mathcal{O}\mathcal{L}$ sei abgeschlossen gegen Bildung endlicher Colimites in $\mathcal{C}$. Jedes Objekt C von $\mathcal{C}$ sei in kanonischer Weise filtr. Colimes von Objekten aus $\mathcal{O}\mathcal{L}$.
$\mathcal{B}$ sei cov., additiv und $T : \mathcal{O}\mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{B}$ ein Funktor .
Dann gibt es (bis auf Isomorphie) genau eine Fortsetzung $\overline{T} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{B}$, die mit filtr. Colimites verträglich ist .

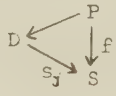
ZUSATZ Ist T additiv , so auch $\overline{T}$.

Dem Beweis werden zwei Überlegungen vorausgeschickt :

LEMMA 5 (Brune[2]) Ist in einer additiven Kategorie $\mathcal{A}$ $((s_i), S)$ obere Schranke eines filtrierenden Systems $D : I \to \mathcal{A}$ und $P \in |\mathcal{A}|$, so sind äquivalent :

i) $(\mathrm{Hom}(P, s_i), \mathrm{Hom}(P, S)) = \varinjlim \mathrm{Hom}(P, \cdot) \circ D$.

ii) Zu jedem $f \in \mathrm{Hom}(P, S)$ gibt es ein $j \in |I|$ und eine Faktorisierung



, und

und ist $i \in |I|$, $h \in \mathrm{Hom}(P, D_i)$ mit $s_i \circ h = o$, so gibt es einen Morphismus $m : i \longrightarrow k$ mit $D(m) \circ h = o$.

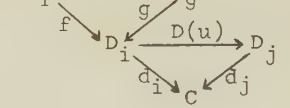
LEMMA 6 Sei mit obigen Voraussetzungen $((d_i), C) = \varinjlim D$. Ist E e.p. in $\mathcal{A}$ und sind $f : E \longrightarrow D_i$, $g : E \longrightarrow D_j$ mit $d_i \circ f = d_j \circ g$, so gibt es $\mu \in |I|$, $x : i \longrightarrow \mu$, $y : j \longrightarrow \mu$ mit $D(x) \circ f = D(y) \circ g$.

BEWEIS Lemma 5 ergibt sich aus der bekannten Charakterisierung filtrierender Colimites in Ens bzw. Ab . Lemma 6 folgt aus Lemma 5 : Zunächst haben wir $\lambda \in |I|$, $v : i \to \lambda$, $w : j \to \lambda$, weil I filtrierend . Aus $d_\lambda \circ D(v) = d_i$, $d_\lambda \circ D(w) = d_j$ ergibt sich $d_\lambda (D(v) \circ f - D(w) \circ g) = o$. Da E e.p. ist, ist $(\mathrm{Hom}(E, d_i), \mathrm{Hom}(E, C)) = \varinjlim \mathrm{Hom}(E, \cdot) \circ D$. Wegen Lemma 5 gibt es $m : \lambda \longrightarrow \mu$ mit $D(m) \circ (D(v) \circ f - D(w) \circ g) = o$. Setze $x = m \circ v$, $y = m \circ w$.

BEWEIS von Satz III.3.5.* 1) Definition von $\overline{T}$:
Für $C \in |\mathcal{C}|$ ist nach Vorauss. $((f)_{f \in |\mathcal{A}/C|}, C) = \varinjlim V$, wobei $V : \mathcal{A}/C \longrightarrow \mathcal{C}$ der kanonische Vergißfunktor ist .
Ist $((c_f), K) = \varinjlim T \circ V$, so definiert man $\overline{T}(f) = c_f$, $\overline{T}(C) = K$.
Für $h : C \longrightarrow C'$ hat man folgende Situation :
$((1)_{1 \in |\mathcal{A}/C'|}, C') = \varinjlim V'$, $((c'_1), K') = \varinjlim T \circ V'$
$\overline{T}(1) = c'_1$, $\overline{T}(C') = K'$.
Ist $m : f \longrightarrow g$ Morphismus in $\mathcal{A}/C$, so ist $m : h \circ f \longrightarrow h \circ g$ Morphismus in $\mathcal{A}/C'$. Daher ist $((c'_{h \circ f})_{f \in |\mathcal{A}/C|}, K')$ obere Schranke von $T \circ V$, und es existiert genau ein $c : K \longrightarrow K'$, so daß $c'_{h \circ f} = c \circ c_f$ für alle $f \in |\mathcal{A}/C|$. Da notwendigerweise $c'_{h \circ f} = \overline{T}(h \circ f) = \overline{T}(h) \circ \overline{T}(f) = \overline{T}(h) \circ c_f$ gelten muß, definiert man $\overline{T}(h) = c$.
Zusammenfassung: $((c_f)_{f \in |\mathcal{A}/C|}, \overline{T}(C)) = \varinjlim T \circ V$, kurz
$\overline{T}(C) = \varinjlim T \circ V$, $c_f = \overline{T}(f)$, $\overline{T}(h) \circ c_f = c'_{h \circ f}$ für $f \in |\mathcal{A}/C|$.
Die Funktoreigenschaften von $\overline{T}$ folgen aus der Colimeseigenschaft .

2) $\overline{T}$ bewahrt filtrierende Colimites :
Sei $D : I \longrightarrow \mathcal{C}$ filtrierendes System in $\mathcal{C}$ und $((d_i), C) = \varinjlim D$
Wir haben folgende Situation :

$$E_{d_i \circ f} = E^j_{D(u)\circ f} = E^i_f \longrightarrow E^i_g$$



$((f)_{f\in|\mathcal{A}/D_i|}, D_i) = \varinjlim V_i$, $V_i : \mathcal{A}/D_i \longrightarrow \mathcal{C}$

$((f)_{f\in|\mathcal{A}/C|}, C) = \varinjlim V$, $V : \mathcal{A}/C \longrightarrow \mathcal{C}$

$((c^i_f)_{f\in|\mathcal{A}/D_i|}, \overline{T}(D_i)) = \varinjlim T\circ V_i$, $\overline{T}(f) = c^i_f$ für $f\in|\mathcal{A}/D_i|$

$((c_f)_{f\in|\mathcal{A}/C|}, \overline{T}(C)) = \varinjlim T\circ V$, $\overline{T}(f) = c_f$ für $f\in|\mathcal{A}/C|$

$\overline{T}(d_i)\circ c^i_f = c_{d_i\circ f}$

Ist $h\in|\mathcal{A}/C|$, so existiert wegen Lemma 5 ein $j\in|I|$ und eine Faktorisierung $h = d_j\circ h'$ mit $h'\in|\mathcal{A}/D_j|$; denn für $E\in|\mathcal{A}|$ bewahrt $\mathrm{Hom}(E,\cdot)$ filtrierende Colimites . Folglich ist

$$|\mathcal{A}/C| = \bigcup_{i\in|I|}\{h \mid \text{Es gibt } f\in|\mathcal{A}/D_i| \text{ mit } h = d_i\circ f\}\ ,$$

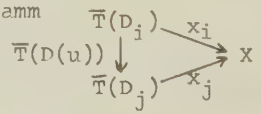
da die Inklusion " $\supset$ " trivialerweise gilt .

Ist $n : h \longrightarrow k$ Morphismus in $\mathcal{A}/C$, so ist etwa $h = d_i\circ h'$, $k = d_j\circ k'$, folglich $d_i\circ h' = h = k\circ n = d_j\circ k'\circ n$. Wegen Lemma 6 gibt es $\mu\in|I|$, $x : i \longrightarrow \mu$, $y : i \longrightarrow \mu$ mit $D(x)\circ h' = D(y)\circ k'\circ n$ $\Longrightarrow n : D(x)\circ h' = h'' \longrightarrow D(y)\circ k' = k''$ ist Morphismus in $\mathcal{A}/D_\mu$. Wegen $d_\mu\circ D(x) = d_i$, $d_\mu\circ D(y) = d_j$ gilt $h = d_\mu\circ h''$, $k = d_\mu\circ k''$. Folglich ist

$$\mathrm{Mor}\,\mathcal{A}/C = \bigcup_{\mu\in|I|}\left\{n \mid n : d_\mu\circ f \longrightarrow d_\mu\circ g \text{, wobei } n : f \longrightarrow g \text{ Morphismus in } \mathcal{A}/D_\mu\right\}\ ,$$

da die Inklusion " $\supset$ " trivialerweise gilt .

Nach diesen Vorbereitungen können wir zeigen, daß $((\overline{T}(d_i)), \overline{T}(C)) = \varinjlim \overline{T}\circ D$ ist . Sei dazu $((x_j), X)$ eine obere Schranke von $\overline{T}\circ D : I \longrightarrow \mathcal{B}$, d.h. für jeden Morphismus $u : i \longrightarrow j$ in I ist das Diagramm



kommutativ .

Zu zeigen ist : Es gibt genau einen Morphismus $x : \overline{T}(C) \longrightarrow X$ mit $x\circ\overline{T}(d_i) = x_i$ für alle $i\in|I|$.

Für einen Morphismus $m : f \longrightarrow g$ in $\mathcal{O}\!\!\mathcal{l}/D_i$ betrachte man das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} & & T\circ V_i(f) & \xrightarrow{c_f^i = \overline{T}(f)} & \\ & \swarrow & & \searrow & \\ T\circ V_i(m) \downarrow & & & & \overline{T}(D_i) \xrightarrow{x_i} X \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & & T\circ V_i(g) & \xrightarrow{c_g^i = \overline{T}(g)} & \end{array} \qquad (*)$$

Die Familie $(x_i \circ c_f^i)_{\substack{i \in |I| \\ f \in |\mathcal{O}\!\!\mathcal{l}/D_i|}}$ liefert eine obere Schranke von $T\circ V$.

Beweis: Für $h \in |\mathcal{O}\!\!\mathcal{l}/C|$ gibt es $i \in |I|$, $f \in |\mathcal{O}\!\!\mathcal{l}/D_i|$ mit $h = d_i \circ f$.
$V(h) = V_i(f)$, $T\circ V(h) = T\circ V_i(f) \xrightarrow{c_f^i} \overline{T}(D_i) \xrightarrow{x_i} X$.
Wir setzen $y_h = x_i \circ c_f^i$, wenn $h = d_i \circ f$. y_h ist wohldefiniert, d.h. unabhängig von der Wahl von i und f . Sei nämlich $h = d_i \circ f = d_j \circ g$. Wegen Lemma 6 existieren $\mu \in |I|$, $u : i \longrightarrow \mu$, $v : j \longrightarrow \mu$ mit $D(u) \circ f = D(v) \circ g$. Da $((x_i), X)$ obere Schranke von $\overline{T} \circ D$ ist, folgt $x_i \circ c_f^i = x_\mu \circ \overline{T}(D(u)) \circ c_f^i = x_\mu \circ \overline{T}(D(u)) \circ \overline{T}(f) = x_\mu \circ \overline{T}(D(u) \circ f)$ und analog $x_j \circ c_g^j = x_\mu \circ \overline{T}(D(v) \circ g)$.

Ist $m : h \longrightarrow k$ Morphismus in $\mathcal{O}\!\!\mathcal{l}/C$, so gibt es $i \in |I|$, so daß $h = d_i \circ f$, $k = d_i \circ g$ und $m : f \longrightarrow g$ Morphismus in $\mathcal{O}\!\!\mathcal{l}/D_i$. Daher ergibt sich aus der Kommutativität des Diagramms (*) die Kommutativität von

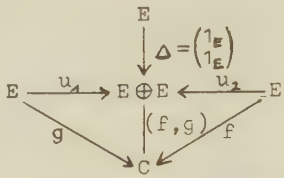
$$\begin{array}{ccc} T\circ V(h) & \xrightarrow{y_h} & X \\ \downarrow & \nearrow & \\ T\circ V(k) & & \end{array}$$

Folglich ist $((y_h)_{h \in |\mathcal{O}\!\!\mathcal{l}/C|}, X)$ obere Schranke von $T\circ V$, und es gibt genau einen Morphismus $y : \overline{T}(C) \longrightarrow X$ mit $y \circ c_h = y_h$ für alle $h \in |\mathcal{O}\!\!\mathcal{l}/C|$. Es ist $y \circ \overline{T}(d_i) \circ c_f^i = y \circ c_{d_i \circ f} = y_{d_i \circ f} = x_i \circ c_f^i$ für alle $i \in |I|$, $f \in |\mathcal{O}\!\!\mathcal{l}/D_i| \Longrightarrow y \circ \overline{T}(d_i) = x_i$ für alle $i \in |I|$. Analog zeigt man, daß y mit dieser Eigenschaft eindeutig ist.

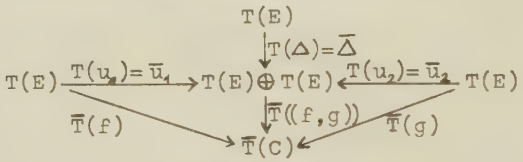
3) Eindeutigkeit von T bis auf Isomorphie :
Ist T^* eine weitere mit filtrierenden Colimites verträgliche Fortsetzung von T , so ist mit den Bezeichnungen von Punkt 1)
$((T^*(f))_{f \in |\mathcal{O}\!\!\mathcal{l}/C|}, T^*(C)) = \varinjlim T^* \circ V = \varinjlim T\circ V$
$((\overline{T}(f))_{f \in |\mathcal{O}\!\!\mathcal{l}/C|}, \overline{T}(C)) = \varinjlim T\circ V$
und man erhält eine natürliche Isomorphie $\varphi : \overline{T} \longrightarrow T^*$.

4) Beweis des Zusatzes :

Für $f, g \in |\mathcal{A}/C|$ mit $V(f) = V(g) = E$ betrachte man das folgende kommutative Diagramm



Es ist $(f,g)\circ\Delta = (f,g)\circ\begin{pmatrix} 1_E \\ 1_E \end{pmatrix} = f + g$. Anwendung von $\overline{T}$ liefert unter Berücksichtigung der Additivität von T



folglich $\overline{T}((f,g)) = (\overline{T}(f), \overline{T}(g))$ und daher $c_{f+g} = \overline{T}(f+g) = \overline{T}((f,g)\circ\Delta) = (\overline{T}(f), \overline{T}(g))\circ\overline{\Delta} = \overline{T}(f) + \overline{T}(g) = c_f + c_g$. Sind jetzt $h, k : C \longrightarrow C'$ in $\mathcal{C}$, so gilt für jedes $f \in |\mathcal{A}/C|$ $\overline{T}(h+k)\circ c_f = c'_{(h+k)\circ f} = c'_{h\circ f + k\circ f} = c'_{h\circ f} + c'_{k\circ f} = \overline{T}(h)\circ c_f + \overline{T}(k)\circ c_f = (T(h) + T(k))\circ c_f$, folglich $\overline{T}(h+k) = \overline{T}(h) + \overline{T}(k)$.

III.3.7. KOROLLAR $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'$ seien covollständige, additive Kategorien . $\mathcal{O}\!\mathcal{l}$ (bzw. $\mathcal{O}\!\mathcal{l}'$) sei Generatormenge von e.p. Objekten für $\mathcal{C}$ (bzw. $\mathcal{C}'$) , die abgeschlossen gegen Bildung endlicher Colimites ist und Bedingung B' von III.1.3. erfüllt . Sind $\mathcal{O}\!\mathcal{l}$ und $\mathcal{O}\!\mathcal{l}'$ isomorph als volle Unterkategorien , so sind $\mathcal{C}$ und $\mathcal{C}'$ äquivalent .

BEWEIS Zweimalige Anwendung von Satz III.3.5.*

III.3.8. KOROLLAR $\mathcal{C}$ sei covollständig , additiv mit Generatormenge $\mathcal{O}\!\mathcal{l}$ von e.p. Objekten . $\mathcal{O}\!\mathcal{l}$ sei abgeschlossen gegen Bildung endlicher Colimites und erfülle Bedingung B' . Dann ist $\mathcal{C} \simeq \mathrm{Lex}(\mathcal{O}\!\mathcal{l}^{OP}, Ab)$.

Zum Schluß dieses Paragraphen sollen noch zwei den Sätzen II.3.4. und II.3.8. analoge Sätze notiert werden .

III.3.9. SATZ Voraussetzungen wie bei Theorem III.3.5. $T, S : \mathcal{Q} \longrightarrow \mathcal{B}$ seien additive Funktoren, $\eta : T \longrightarrow S$ eine natürliche Transformation. Dann gibt es genau eine natürliche Transformation $\bar{\eta} : \bar{T} \longrightarrow \bar{S}$ mit $\bar{\eta}/\mathcal{Q} = \eta$. (Hierbei sind $\bar{T}, \bar{S}$ die durch Th.III.3.5. bestimmten Fortsetzungen von T und S)

BEWEIS In Analogie zur Konstruktion von $\bar{T}$ in III.3.5. setzt man η zuerst auf die volle Unterkategorie aller Coprodukte von Objekten aus $\mathcal{Q}$ fort: $\bar{\eta}_{\amalg E_i} = \coprod_{i\in I} \eta_{E_i}$, $E_i \in \mathcal{Q}$. Diese Fortsetzung ist natürliche Transformation, denn für $\alpha : \coprod_{i\in I} E_i \longrightarrow \coprod_{k\in K} E'_k$ erhält man auf Grund der Definition von $\bar{T}(\alpha)$, $\bar{S}(\alpha)$ und der Natürlichkeit von η $\bar{\eta}_{\amalg E'_k} \circ \bar{T}(\alpha) \circ \bar{T}(u_j) = \bar{S}(\alpha) \circ \eta_{\amalg E_i} \circ \bar{T}(u_j)$ für jedes $j \in I$ (Vgl.III.3.5. Def. von $\bar{T}(\alpha)$). Ist $C \in |\mathcal{C}|$ beliebig, $P_1 \xrightarrow{d} P_0 \longrightarrow C \longrightarrow 0$ kanonische rein-projektive Auflösung (bez. $\mathcal{Q}$), so wird $\bar{\eta}_C$ durch das folgende Diagramm definiert:

$$\begin{array}{ccccc} \bar{T}(P_1) & \xrightarrow{\bar{T}(d)} & \bar{T}(P_0) & \longrightarrow & \operatorname{cok}\bar{T}(d) = \bar{T}(C) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \bar{\eta}_C \\ \bar{S}(P_1) & \xrightarrow{\bar{S}(d)} & \bar{S}(P_0) & \longrightarrow & \operatorname{cok}\bar{S}(d) = \bar{S}(C) \end{array}$$

Die Natürlichkeit von $\bar{\eta}_C$ ergibt sich aus der Definition von $\bar{T}(f)$ für $f : C \longrightarrow C'$ (Vgl.III.3.5.).

III.3.10. SATZ Voraussetzungen wie bei Theorem III.3.5., zusätzlich $\mathcal{K}$ eine additive (bzw. covollständige) Kategorie. $T : \mathcal{Q}\times\mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{B}$ sei in der 1. Variablen additiv,
in der 2. Variablen additiv (bzw. costetig)
$\Longrightarrow$ Es gibt (bis auf Isomorphie) genau eine Fortsetzung $\bar{T} : \mathcal{C}\times\mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{B}$ von T mit 1. Variable Coprodukt-verträglich und rechtsexakt auf rein-exakten Sequenzen (bez. $\mathcal{Q}$) der Form $X \longrightarrow Y \longrightarrow Z \longrightarrow 0$.
2. Variable additiv (bzw. costetig)

BEWEIS mit III.3.5. und III.3.9.

III.4. Tensorprodukte bei lokal endlich präsentierbaren Kategorien

Im folgenden sei $\mathcal{C}$ lokal endlich präsentierbar und genüge den äquivalenten Bedingungen von Theorem III.3.3. : $\mathcal{C}$ habe Kerne , $\mathcal{G}$ sei Generatormenge von e.p. Objekten für $\mathcal{C}$, $\mathcal{A}$ der Abschluß von $\mathcal{G}$ gegen Bildung endlicher Colimites in $\mathcal{C}$; jedes $C \in |\mathcal{C}|$ sei filtrierender Colimes von Objekten aus $\mathcal{G}$, so daß $\mathcal{C} \simeq \mathrm{Lex}(\mathcal{A}^{\mathrm{op}}, \mathrm{Ab})$.

Wenn nichts anderes gesagt ist , bedeute "Rein-Exaktheit" stets "Rein-Exaktheit (bez.$\mathcal{A}$)" . Wegen III.3.3.iv gelten Bedingung A von III.1.3. und D von III.1.4. Insbesondere ist $\mathcal{A}$ repräsentativ für e p und "Rein-Exaktheit" gleichbedeutend mit "Rein-Exaktheit (bez. e p)" , d.h. eine Sequenz $\mathcal{E}$ in $\mathcal{C}$ ist rein-exakt genau dann , wenn $\mathrm{Hom}(E, \mathcal{E})$ exakt in Ab für jedes $E \in |\mathcal{A}|$, bzw. für jedes e.p. E in $\mathcal{C}$ (III.2.7.) . Ferner sind rein-exakte Sequenzen der Form $X \to Y \to Z \to 0$ Cokerne .

In Analogie zu der Bemerkung im Anschluß an II.3.8. erhält man mit Hilfe von III.3.10. zu dem Auswertungsfunktor $\mathcal{G} \times \mathrm{Add}(\mathcal{G}, \mathcal{B}) \longrightarrow \mathcal{B}$ ($\mathcal{B}$ cov. , additiv) eine (bis auf Isomorphie) eindeutige Fortsetzung

$$\overline{\otimes} : \mathrm{Lex}(\mathcal{A}^{\mathrm{op}}, \mathrm{Ab}) \times \mathrm{Add}(\mathcal{G}, \mathcal{B}) \longrightarrow \mathcal{B} \qquad \text{mit}$$

1. Variable Coprodukt-verträglich und rechtsexakt auf rein-exakten Sequenzen (bez. $\mathcal{G}$) der Form $X \to Y \to Z \to 0$
2. Variable costetig .

Für $\mathcal{G} = \mathcal{A}$ stimmt $\overline{\otimes}$ mit der Einschränkung des Funktors $\otimes_1 : \mathrm{Add}(\mathcal{A}^{\mathrm{op}}, \mathrm{Ab}) \times \mathrm{Add}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \longrightarrow \mathcal{B}$ überein (II.3.8. und Bemerkung zu III.3.5.) . Ist überdies $\mathcal{B} = \mathrm{Ab}$, so erhält man $\overline{\otimes}$ als Einschränkung von $\otimes : \mathrm{Add}(\mathcal{A}^{\mathrm{op}}, \mathrm{Ab}) \times \mathrm{Add}(\mathcal{A}, \mathrm{Ab}) \longrightarrow \mathrm{Ab}$.

III.4.1. DEFINITION $\mathcal{C}^{\vee}$ bezeichne die Kategorie der Coprodukt-verträglichen und auf rein-exakten Sequenzen der Form $X \to Y \to Z \to 0$ rechtsexakten Funktoren von $\mathcal{C}$ nach Ab .

III.4.2. BEMERKUNG

a) $F \in |\mathcal{C}^{\aleph_0}| \iff F : \mathcal{C} \longrightarrow Ab$ ist additiv und bewahrt filtrierende Colimites

b) $\mathcal{C}^{\aleph_0}$ ist abgeschlossen gegen Bildung von Colimites in $Add(\mathcal{C}, Ab)$, d.h. $\mathcal{C}^{\aleph_0}$ hat Colimites und diese werden "punktweise" gebildet.

c) Ist $E \in |\mathcal{C}|$ endlich präsentiert, so ist $Hom(E, \cdot) \in |\mathcal{C}^{\aleph_0}|$.

d) Es gilt $\mathcal{C}^{\vee} \subset \mathcal{C}^{\aleph_0}$, wobei $\mathcal{C}^{\vee}$ die Kategorie aller costetigen Funktoren von $\mathcal{C}$ nach Ab ist.

BEWEIS a) gilt wegen III.3.5. Zusatz ; b), c), d) folgen aus a).

III.4.3. BEMERKUNG Ein $F \in |\mathcal{C}^{\aleph_0}|$ werde als <u>modifizierter Tensorproduktfunktor auf $\mathcal{C}$</u> bezeichnet. $T^{\circ} : \mathcal{C} \times \mathcal{C}^{\aleph_0} \longrightarrow Ab$ sei die Einschränkung des Auswertungsfunktors $\mathcal{C} \times Add(\mathcal{C}, Ab) \longrightarrow Ab$. T° heißt <u>modifiziertes Tensorprodukt</u>. T° ist in der 1. Variablen Coprodukt-verträglich und rechtsexakt auf rein-exakten Sequenzen der Form $X \to Y \to Z \to 0$ (d.h. additiv und bewahrt filtrierende Colimites) und in der 2. Variablen costetig.

III.4.4. SATZ $\mathcal{C}^{\aleph_0} \simeq Add(\mathcal{A}, Ab)$ ist Äquivalenz.

$F \longmapsto F/\mathcal{A}$

$\bar{G} \longleftarrow\!\shortmid\ G$

ZUSATZ Insbesondere ist $\mathcal{C}^{\aleph_0}$ abelsch mit Generatormenge von klein-projektiven Objekten, so daß für $\mathcal{C}^{\aleph_0}$ die Begriffe und Aussagen von II.3., II.4. gelten (Rein-Exaktheit, Halbinjektivität etc.)

BEWEIS ergibt sich aus III.3.5. und III.3.9. mit $\mathcal{J} = \mathcal{A}$.

Eine ähnliche Aussage findet sich bei Gabriel, Ulmer[9] in einer Formulierung mit Kan'schen Koerweiterungen.

Im Folgenden sei $\mathcal{A}$ stets additiv mit endlichen Colimites. II.3.2. und III.3.5. werden wir häufig in den folgenden Fassungen benutzen:

Ist $T : \mathcal{A} \longrightarrow Ab$ additiv, so existiert (bis auf Isomorphie) genau eine costetige Fortsetzung $\bar{T} : Add(\mathcal{A}^{op}, Ab) \longrightarrow Ab$ von T und genau eine Fortsetzung $\bar{T}' : Lex(\mathcal{A}^{op}, Ab) \longrightarrow Ab$ von T, die

additiv und mit filtrierenden Colimites verträglich ist .

II.3.5. und III.4.4. werden wir in den folgenden Fassungen benutzen :

$(\mathrm{Add}(\mathcal{A}^{op},Ab))^{\vee} \longrightarrow \mathrm{Add}(\mathcal{A},Ab)$ ist Äquivalenz .

$F \longmapsto F/\mathcal{A}$

$\overline{G} \longmapsto G$

$(\mathrm{Lex}(\mathcal{A}^{op},Ab))^{\vee_0} \longrightarrow \mathrm{Add}(\mathcal{A},Ab)$ ist Äquivalenz .

$F \longmapsto F/\mathcal{A}$

$\overline{T}' \longmapsto T$

III.4.5. SATZ $\mathcal{A}$ sei additiv mit endlichen Colimites .

$(\mathrm{Add}(\mathcal{A}^{op},Ab))^{\vee} \longrightarrow (\mathrm{Lex}(\mathcal{A}^{op},Ab))^{\vee_0}$ ist Äquivalenz .

$F \longmapsto F/\mathrm{Lex}(\mathcal{A}^{op},Ab)$

BEWEIS mit II.3.5. und III.4.4.

Im folgenden Therorem wird auf den in III.2.3. angegebenen Reflektor $R : \mathrm{Add}(\mathcal{A}^{op},Ab) \longrightarrow \mathrm{Lex}(\mathcal{A}^{op},Ab)$ mit Reflexion $u_D : D \longrightarrow R(D)$ Bezug genommen .

III.4.6. THEOREM $\mathcal{A}$ sei additiv mit endlichen Colimites . Für $F \in (\mathrm{Add}(\mathcal{A}^{op},Ab))^{\vee}$ sind äquivalent :

i) F ist halbinjektiv .
ii) $F/\mathcal{A}$ ist rechtsexakt .
iii) $F(u_D)$ ist Isomorphismus für jedes e.p. $D \in \mathrm{Add}(\mathcal{A}^{op},Ab)$.
iv) $F(u_D)$ ist Isomorphismus für jedes $D \in \mathrm{Add}(\mathcal{A}^{op},Ab)$.
v) $F/\mathrm{Lex}(\mathcal{A}^{op},Ab)$ ist rechtsexakt .
vi) $F/\mathrm{Lex}(\mathcal{A}^{op},Ab)$ ist costetig .
vii) $F/\mathrm{Lex}(\mathcal{A}^{op},Ab) \in (\mathrm{Lex}(\mathcal{A}^{op},Ab))^{\vee}$.

BEWEIS vi $\Longleftrightarrow$ vii ist trivial .

i $\Longleftrightarrow$ ii ist II.4.8. unter Beachtung der Äquivalenz II.3.5.

ii $\Longrightarrow$ iii Für e.p. $E \in \mathrm{Add}(\mathcal{A}^{op},Ab)$ hat man eine exakte Sequenz $[\cdot,A] \xrightarrow{[\cdot,f]} [\cdot,B] \longrightarrow E \longrightarrow 0$ mit $A,B \in |\mathcal{A}|$. Ist $C = \mathrm{cok}\, f$ in $\mathcal{A}$, so wird die Reflexion u_E durch das folgende Diagramm definiert (III.2.3.) :

$$\begin{array}{ccccccc} [\cdot,A] & \longrightarrow & [\cdot,B] & \longrightarrow & E & \longrightarrow & 0 \\ \| & & \| & & \downarrow u_E & & \\ [\cdot,A] & \longrightarrow & [\cdot,B] & \longrightarrow & [\cdot,C] & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Da $F : \mathrm{Add}(\mathcal{A}^{op}, Ab) \longrightarrow Ab$ costetig ist, ist die Sequenz $F([\cdot, A]) \longrightarrow F([\cdot, B]) \longrightarrow F(E) \longrightarrow 0$ exakt. Da $F/\mathcal{A}$ rechtsexakt ist, ist auch $F([\cdot, A]) \longrightarrow F([\cdot, B]) \longrightarrow F([\cdot, C]) \longrightarrow 0$ exakt, folglich $F(u_E)$ ein Isomorphismus.
Hierbei wurde via Yoneda-Einbettung A mit $[\cdot, A]$ identifiziert.

iii $\Longrightarrow$ iv Ist $G \in \mathrm{Add}(\mathcal{A}^{op}, Ab)$ beliebig, $G = \varinjlim E_i$, E_i e.p., so ist $u_G = \varinjlim u_{E_i}$ (III.2.3.), folglich $F(u_G) = F(\varinjlim u_{E_i}) = \varinjlim F(u_{E_i})$ ein Isomorphismus (Costetigkeit von F)

iv $\Longrightarrow$ v $X \xrightarrow{f} Y$ in $\mathrm{Lex}(\mathcal{A}^{op}, Ab)$, $(g, G) = \mathrm{cok}\, f$ in $\mathrm{Add}(\mathcal{A}^{op}, Ab)$. Der Cokern in $\mathrm{Lex}(\mathcal{A}^{op}, Ab)$ wird erhalten durch Anwendung des Reflektors:

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & G \\ & \searrow^{u_G \circ g} & & & \downarrow u_G \\ & & & & R(G) \end{array} \qquad (u_G\, g, R(G)) = \mathrm{cok}\, f \text{ in } \mathrm{Lex}(\mathcal{A}^{op}, Ab).$$

Da $F : \mathrm{Add}(\mathcal{A}^{op}, Ab) \longrightarrow Ab$ costetig und $F(u_G)$ Isomorphismus für jedes G, folgt $(F(u_G \circ g), F(R(G))) = \mathrm{cok}\, F(f)$ in Ab.

v $\Longrightarrow$ vi gilt, weil F costetig und $\mathrm{Lex}(\mathcal{A}^{op}, Ab)$ abgeschlossen gegen Bildung von Coprodukten in $\mathrm{Add}(\mathcal{A}^{op}, Ab)$.

vi $\Longrightarrow$ ii gilt, weil $\mathcal{A} \longrightarrow \mathrm{Lex}(\mathcal{A}^{op}, Ab)$ rechtsexakt (III.2.6.).

III.4.7. KOROLLAR $\mathcal{A}$ sei additiv mit endlichen Colimites. Für $T \in (\mathrm{Lex}(\mathcal{A}^{op}, Ab))^{\vee_0}$ sind äquivalent:

i) T ist halbinjektiv.
ii) $T/\mathcal{A}$ ist rechtsexakt.
iii) T ist rechtsexakt.
iv) T ist costetig.
v) $T \in (\mathrm{Lex}(\mathcal{A}^{op}, Ab))^{\vee}$.

BEWEIS mit III.4.5., III.4.6.

III.4.8. KOROLLAR $\mathcal{A}$ sei additiv mit endlichen Colimites. Dann ist $(\mathrm{Lex}(\mathcal{A}^{op}, Ab))^{\vee} \longrightarrow \mathrm{Rex}(\mathcal{A}, Ab)$ Äquivalenz.

$$F \longmapsto F/\mathcal{A}$$
$$G \longmapsto G$$

BEWEIS ergibt sich aus III.4.7. und III.4.4. Man betrachte

$$\begin{array}{ccc} (\mathrm{Lex}(\mathcal{A}^{\mathrm{op}},\mathrm{Ab}))^{\vee} & & \mathrm{Rex}(\mathcal{A},\mathrm{Ab}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (\mathrm{Lex}(\mathcal{A}^{\mathrm{op}},\mathrm{Ab}))^{\vee_0} & \longrightarrow & \mathrm{Add}(\mathcal{A},\mathrm{Ab}) \end{array}$$

ANMERKUNG Man kann vermöge der Äquivalenz $\mathcal{C} \simeq \mathrm{Lex}(\mathcal{A}^{\mathrm{op}},\mathrm{Ab})$ in III.4.7. und III.4.8. überall $\mathrm{Lex}(\mathcal{A}^{\mathrm{op}},\mathrm{Ab})$ durch $\mathcal{C}$ ersetzen.

III.4.9. FOLGERUNG $\mathcal{A}$ sei additiv mit endlichen Colimites.
$\mathcal{C} = \mathrm{Lex}(\mathcal{A}^{\mathrm{op}},\mathrm{Ab}) = \underline{\text{flach}}$ in $\mathrm{Add}(\mathcal{A}^{\mathrm{op}},\mathrm{Ab}) = \mathcal{S}$
$\mathcal{C}^{\vee} \simeq \mathrm{Rex}(\mathcal{A},\mathrm{Ab}) = \underline{\text{h.i.}}$ in $\mathrm{Add}(\mathcal{A},\mathrm{Ab}) \simeq \mathcal{S}^{\vee}$

Aus dem kommutativen Diagramm von Funktoren

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{C}^{\vee} = (\mathrm{Lex}(\mathcal{A}^{\mathrm{op}},\mathrm{Ab}))^{\vee} & \subset & (\mathrm{Lex}(\mathcal{A}^{\mathrm{op}},\mathrm{Ab}))^{\vee_0} & \simeq & (\mathrm{Add}(\mathcal{A}^{\mathrm{op}},\mathrm{Ab}))^{\vee} = \mathcal{S}^{\vee} \\ \| & & & & \| \\ \mathrm{Rex}(\mathcal{A},\mathrm{Ab}) & & \longrightarrow & & \mathrm{Add}(\mathcal{A},\mathrm{Ab}) \end{array}$$

ergibt sich, daß $\mathcal{C}^{\vee} = \underline{\text{h.i.}}$ in $\mathcal{S}^{\vee}$ (bis auf Äquivalenz).

BEMERKUNG Aus dem Tensorprodukt $\top : \mathcal{C} \times \mathcal{C}^{\vee} \longrightarrow \mathrm{Ab}$ erhält man vermöge der Äquivalenzen III.3.1., III.4.8. einen in beiden Variablen costetigen Funktor
$\cdot \otimes \cdot : \mathrm{Lex}(\mathcal{A}^{\mathrm{op}},\mathrm{Ab}) \times \mathrm{Rex}(\mathcal{A},\mathrm{Ab}) \longrightarrow \mathrm{Ab}$, der ebenfalls als Tensorprodukt bezeichnet wird. Für $C \in |\mathcal{C}|$, $\overline{F} \in |\mathcal{C}^{\vee}|$, wobei $\overline{F}/\mathcal{A} = F \in \mathrm{Rex}(\mathcal{A},\mathrm{Ab})$ hat man $\overline{F}(C) = \top(C,\overline{F}) = \mathrm{Hom}(\cdot,C)/\mathcal{A}^{\mathrm{op}} \otimes F$. Für $A \in |\mathcal{A}|$ ergibt sich daraus $[\cdot,A] \otimes F = F(A)$, d.h. $\cdot \otimes F$ ist die nach III.3.5. eindeutige Fortsetzung von F, die additiv und mit filtrierenden Colimites verträglich ist ($\cdot \otimes F$ costetig).

Eine Symmetrie-Aussage wie im Fall des Tensorprodukts $\mathrm{Add}(\mathcal{A}^{\mathrm{op}},\mathrm{Ab}) \times \mathrm{Add}(\mathcal{A},\mathrm{Ab}) \longrightarrow \mathrm{Ab}$ läßt sich hier im allgemeinen nicht erhalten, da $\mathcal{A}^{\mathrm{op}}$ nicht Generatormenge von $\mathrm{Rex}(\mathcal{A},\mathrm{Ab})$ ist. $\sim : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}^{\vee\vee}$ ist also keine Äquivalenz.

Man erhält in Analogie zu den "Dualitätsfunktoren" von Stenström [21] zwar Einbettungen

$e : (\mathrm{Lex}(\mathcal{A}^{\mathrm{op}},\mathrm{Ab}))^{\mathrm{op}} \hookrightarrow \mathrm{Rex}(\mathcal{A},\mathrm{Ab})$, $F \longmapsto [F\cdot,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}]_{\mathrm{Ab}}$

$i : \mathrm{Rex}(\mathcal{A},\mathrm{Ab}) \hookrightarrow (\mathrm{Lex}(\mathcal{A}^{\mathrm{op}},\mathrm{Ab}))^{\mathrm{op}}$, $G \longmapsto [G\cdot,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}]_{\mathrm{Ab}}$,

die Cokerne bewahren und reflektieren. Überdies gilt:

i bewahrt Colimites . e überführt filtr. Colimites und Coprodukte in $Lex(\mathcal{A}^{op},Ab)$ in Limites in $Rex(\mathcal{A},Ab)$ und ist exakt auf rein-exakten Sequenzen in $Lex(\mathcal{A}^{op},Ab)$. Man erhält durch Einschränkung von e eine Einbettung $\mathcal{A}^{op} \hookrightarrow Rex(\mathcal{A},Ab)$, $A \longmapsto [[\cdot,A],\mathbb{Q}/\mathbb{Z}]_{Ab}$. $\mathcal{A}^{op}$ ist jedoch nicht Generatormenge von $Rex(\mathcal{A},Ab)$.

Betrachtet man das Tensorprodukt ($\mathcal{A}$ additiv mit endl. Colim.)

$$\begin{array}{ccc} Add(\mathcal{A}^{op},Ab) \times Add(\mathcal{A},Ab) & \xrightarrow{\otimes} & Ab \\ \uparrow & & \\ \mathcal{A} \times \mathcal{A}^{op} & & \end{array}$$

und für $G \in Add(\mathcal{A},Ab)$ den costetigen Funktor $\cdot \otimes G : Add(\mathcal{A}^{op},Ab) \longrightarrow Ab$ mit $(\cdot \otimes G)/\mathcal{A} = G$, so gilt die Äquivalenz : $(\cdot \otimes G)/Lex(\mathcal{A}^{op},Ab) \in (Lex(\mathcal{A}^{op},Ab))^{\vee} \iff G \in Rex(\mathcal{A},Ab) \iff$ G halbinjektiv in $Add(\mathcal{A},Ab)$. (III.4.6.)

Wäre nun $(\cdot \otimes X)/Lex(\mathcal{A}^{op},Ab) \in (Lex(\mathcal{A}^{op},Ab))^{\vee}$ für jedes $X \in |\mathcal{A}^{op}|$, so wäre $\mathcal{A}^{op} \subset$ h.i. in $Add(\mathcal{A},Ab)$, folglich $Add(\mathcal{A}^{op},Ab)$ v.Neumann regulär (II.4.10.b) . Dann wären alle Objekte in $Add(\mathcal{A}^{op},Ab)$ flach und alle Objekte in $Add(\mathcal{A},Ab)$ h.i. , d.h. $Lex(\mathcal{A}^{op},Ab) = Add(\mathcal{A}^{op},Ab)$ und $Rex(\mathcal{A},Ab) = Add(\mathcal{A},Ab)$.
Ist also $\mathcal{A}^{op} \subset (Lex(\mathcal{A}^{op},Ab))^{\vee}$ vermöge der Äquivalenz $Add(\mathcal{A},Ab) \simeq (Add(\mathcal{A}^{op},Ab))^{\vee} \simeq (Lex(\mathcal{A}^{op},Ab))^{\vee}$ (III.4.5.) , so stimmt das Tensorprodukt $Lex(\mathcal{A}^{op},Ab) \times Rex(\mathcal{A},Ab) \longrightarrow Ab$ mit dem Tensorprodukt $Add(\mathcal{A}^{op},Ab) \times Add(\mathcal{A},Ab) \longrightarrow Ab$ überein .

III.5. Weitere Eigenschaften und Anwendungen von Tensorprodukten

$\mathcal{A}$ sei additiv mit endlichen Coprodukten . $\underline{\text{flach}}_{\mathcal{S}}$ sei die volle Unterkategorie der flachen Objekte von $\mathcal{S} = \text{Add}(\mathcal{A}^{\text{op}},\text{Ab})$. Es ist $\mathcal{S}^{\vee} \simeq \text{Add}(\mathcal{A},\text{Ab})$, $F \longmapsto F/\mathcal{A}$.

III.5.1. LEMMA Für eine Sequenz $\mathcal{E} : 0 \longrightarrow F \longrightarrow G \longrightarrow H \longrightarrow 0$ in $\mathcal{S}^{\vee} \simeq (\text{Add}(\mathcal{A}^{\text{op}},\text{Ab}))^{\vee}$ sind äquivalent:

i) Die Sequenz ist exakt in $\mathcal{S}^{\vee}$.

ii) Die Sequenz ist punktweise exakt für jedes $X \in |\mathcal{A}|$.

iii) Die Sequenz ist punktweise exakt für jedes $X \in |\underline{\text{flach}}_{\mathcal{S}}|$.

BEWEIS trivial , da jedes flache Objekt X in $\mathcal{S} = \text{Add}(\mathcal{A}^{\text{op}},\text{Ab})$ filtr. Colimes von e.e. freien Objekten , d.h. von Objekten aus $\mathcal{A}$ ist .

BEMERKUNG Analog zur Vorbemerkung zu II.6.3. überlegt man sich , daß $\underline{\text{flach}}_{\mathcal{S}}$ genau dann Kerne hat , wenn $\underline{\text{flach}}_{\mathcal{S}}$ abgeschlossen gegen Bildung von Kernen in $\mathcal{S} = \text{Add}(\mathcal{A}^{\text{op}},\text{Ab})$ ist . Man benutzt dabei , daß $\underline{\text{flach}}_{\mathcal{S}}$ die Generatormenge $\mathcal{A}$ von $\text{Add}(\mathcal{A}^{\text{op}},\text{Ab})$ enthält .

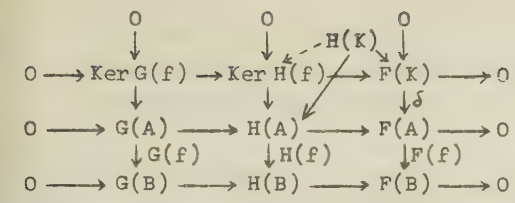
III.5.2. LEMMA $\underline{\text{flach}}_{\mathcal{S}}$ habe Kerne .
Für $F \in \mathcal{S}^{\vee} \simeq (\text{Add}(\mathcal{A}^{\text{op}},\text{Ab}))^{\vee}$ sind äquivalent :

i) F ist flach in $\mathcal{S}^{\vee}$.

ii) $F/\underline{\text{flach}}_{\mathcal{S}}$ ist linksexakt .

BEWEIS i $\Longrightarrow$ ii mit II.4.5. oder direkt: Ist F flach in $\mathcal{S}^{\vee} \simeq \text{Add}(\mathcal{A},\text{Ab})$, so ist F filtr. Colimes von e.e. freien Objekten , d.h. $F = \varinjlim [A_i,\cdot]_{\mathcal{S}}$, $A_i \in |\mathcal{A}|$ (II.3.5.) , folglich F linksexakt und $F/\underline{\text{flach}}_{\mathcal{S}}$ linksexakt .
ii $\Longrightarrow$ i Sei $F/\underline{\text{flach}}_{\mathcal{S}}$ linksexakt und $\mathcal{E} : 0 \to G \to H \to F \to 0$ exakt in $\mathcal{S}^{\vee}$. Wir zeigen Kriterium II.4.7. für die exakte Sequenz $\mathcal{E}/\mathcal{A} : 0 \to G/\mathcal{A} \to H/\mathcal{A} \to F/\mathcal{A} \to 0$ in $\text{Add}(\mathcal{A},\text{Ab})$.

Sei $f : A \longrightarrow B$ in $\mathcal{A}$, $K = \text{Ker } f$, $K \in |\underline{\text{flach}}_{\mathcal{S}}|$ nach Vorauss. Da $F/\underline{\text{flach}}_{\mathcal{S}}$ linksexakt ist , und wegen Lemma III.5.1. sind in dem folgenden kommutativen Diagramm die Spalten und die beiden unteren Zeilen exakt :



(Kern-Sequenz)

Die Links-Exaktheit der Kern-Sequenz ist dann klar .

$\mathrm{Ker}\,H(f) \xrightarrow{H(K)} F(K)$ ist kommutativ , weil δ Monomorphismus .

$H(K) \to F(K)$ ist Epimorphismus , weil $\mathcal{E} : 0 \to G \to H \to F \to 0$ punktweise exakt für jedes flache $X \in |\mathcal{I}|$ (III.5.1.) . $\Longrightarrow$ $\mathrm{Ker}\,H(f) \to F(K)$ ist Epimorphismus , folglich die Kern-Sequenz exakt . Daher ist $\mathcal{E}/\mathcal{A}$ rein-exakt und damit auch $\mathcal{E}$.

Aus III.5.1. und III.5.2. ergibt sich als einfache

FOLGERUNG $\mathcal{A}$ sei additiv mit endlichen Coprodukten . Hat $\underline{\text{flach}}_{\mathcal{I}} \subset \mathrm{Add}(\mathcal{A}^{op},Ab)$ Kerne , so sind Kerne flacher Objekte in $\mathcal{I}^{\vee} \simeq \mathrm{Add}(\mathcal{A},Ab)$ wieder flach , d.h. $\underline{\text{flach}}_{\mathcal{I}^{\vee}}$ hat Kerne . (Ergänzung zu II.4.9.)
Ist überdies $\underline{\text{inj}}_{\mathcal{I}} \subset \underline{\text{flach}}_{\mathcal{I}}$ in $\mathcal{I}$ oder $\underline{\text{inj}} \subset \underline{\text{flach}}$ in $\mathrm{Add}(\mathcal{A},Ab)$, so ist $\mathcal{A}$-Mod $= \mathrm{Add}(\mathcal{A},Ab)$ v.Neumann regulär . (Ergänzung zu II.4.10.)

BEMERKUNG Ist $\mathcal{A}$ additiv mit endlichen Coprodukten und Cokernen , so sind Kerne flacher Objekte in $\mathrm{Add}(\mathcal{A},Ab)$ flach , (weil $\mathrm{Lex}(\mathcal{A}^{op},Ab) = \underline{\text{flach}}_{\mathcal{I}}$ Kerne hat .)

III.5.2.* LEMMA $\mathcal{A}$ sei additiv mit endlichen Coprodukten und Cokernen . Für $G \in (\mathrm{Add}(\mathcal{A}^{op},Ab))^{\vee} \simeq \mathrm{Add}(\mathcal{A},Ab)$ gilt:
a) G h.i. in $(\mathrm{Add}(\mathcal{A}^{op},Ab))^{\vee} \iff G/\mathrm{Lex}(\mathcal{A}^{op},Ab)$ rechtsexakt .
b) G flach in $(\mathrm{Add}(\mathcal{A}^{op},Ab))^{\vee} \iff G/\mathrm{Lex}(\mathcal{A}^{op},Ab)$ linksexakt .

BEWEIS a) III.4.6. , b) III.5.2.

BEMERKUNG Ist $\mathcal{A}$ additiv mit endlichen Coprodukten und Cokernen , so hat man hiermit Kriterien für Flachheit und Halbinjektivität in $\mathrm{Add}(\mathcal{A},Ab)$, die eine Ergänzung von II.4.8. darstellen . Analoge Kriterien gelten natürlich für

$\mathrm{Add}(\mathcal{A}^{\mathrm{op}},\mathrm{Ab})$, wenn $\mathcal{A}$ additiv mit endlichen Coprodukten und Kernen : Sei $F \in (\mathrm{Add}(\mathcal{A},\mathrm{Ab}))^{\vee} \simeq \mathrm{Add}(\mathcal{A}^{\mathrm{op}},\mathrm{Ab})$. Dann gilt
a) F h.i. in $(\mathrm{Add}(\mathcal{A},\mathrm{Ab}))^{\vee} \iff F/\mathrm{Lex}(\mathcal{A},\mathrm{Ab})$ rechtsexakt .
b) F flach in $(\mathrm{Add}(\mathcal{A},\mathrm{Ab}))^{\vee} \iff F/\mathrm{Lex}(\mathcal{A},\mathrm{Ab})$ linksexakt .

Im folgenden sei $\mathcal{C}$ lokal endlich präsentierbar und erfülle die äquivalenten Bedingungen von Theorem III.3.3. Der Einfachheit halber nehmen wir an : $\mathcal{C} = \mathrm{Lex}(\mathcal{A}^{\mathrm{op}},\mathrm{Ab})$, wobei $\mathcal{A}$ kleine additive Kategorie mit endlichen Coprodukten und Cokernen. Insbesondere ist dann $\mathcal{C} = \underline{\mathrm{flach}}_{\mathcal{S}}$, wobei $\mathcal{S} = \mathrm{Add}(\mathcal{A}^{\mathrm{op}},\mathrm{Ab})$. Diese Annahme dient der Vereinfachung der folgenden Beweise. Die folgenden Sätze gelten auch , wenn nur $\mathcal{C} \simeq \mathrm{Lex}(\mathcal{A}^{\mathrm{op}},\mathrm{Ab})$. Wir haben $\mathcal{C}^{\vee_0} \simeq \mathrm{Add}(\mathcal{A},\mathrm{Ab})$, $\mathcal{C}^{\vee} \simeq \mathrm{Rex}(\mathcal{A},\mathrm{Ab})$
$F \longmapsto F/\mathcal{A}$ $F \longmapsto F/\mathcal{A}$ (III.4.4., III.4.8.)

III.5.3. SATZ Für eine Sequenz $0 \longrightarrow F \longrightarrow G \longrightarrow H \longrightarrow 0$ in $\mathcal{C}^{\vee_0}$ sind äquivalent:
i) Die Sequenz ist exakt in $\mathcal{C}^{\vee_0}$.
ii) Die Sequenz ist punktweise exakt für jedes $X \in |\mathcal{A}|$.
iii) Die Sequenz ist punktweise exakt für jedes $X \in |\mathcal{C}|$.
Insbesondere ist das modifizierte Tensorprodukt $\mathcal{C} \times \mathcal{C}^{\vee_0} \longrightarrow \mathrm{Ab}$ in der 2. Variablen exakt .

BEWEIS trivial , da jedes $X \in |\mathcal{C}|$ filtr. Colimes von Objekten aus $\mathcal{A}$ ist und jedes $F \in |\mathcal{C}^{\vee_0}|$ filtr. Colimites bewahrt , oder als Anwendung von III.5.1. unter Benutzung der Äquivalenz $(\mathrm{Add}(\mathcal{A}^{\mathrm{op}},\mathrm{Ab}))^{\vee} \longrightarrow (\mathrm{Lex}(\mathcal{A}^{\mathrm{op}},\mathrm{Ab}))^{\vee_0}$, $T \longmapsto T/\mathcal{C}$ (III.4.5.) .

III.5.4. SATZ $\mathcal{E} : 0 \longrightarrow X \longrightarrow Y \longrightarrow Z \longrightarrow 0$ sei exakt in $\mathcal{C} = \mathrm{Lex}(\mathcal{A}^{\mathrm{op}},\mathrm{Ab})$. Äquivalent sind:
i) $\mathcal{E} : 0 \longrightarrow X \longrightarrow Y \longrightarrow Z \longrightarrow 0$ rein-exakt in $\mathcal{C}$.
ii) $FX \longrightarrow FY \longrightarrow FZ \longrightarrow 0$ exakt für jedes $F \in |\mathcal{C}^{\vee_0}|$.
iii) $0 \longrightarrow FX \longrightarrow FY \longrightarrow FZ \longrightarrow 0$ exakt für jedes $F \in |\mathcal{C}^{\vee_0}|$.

BEWEIS i $\Longrightarrow$ ii ist trivial . Ist E endlich präsentiert in $\mathcal{C}$, so ist $[E,\cdot]_{\mathcal{C}} \in |\mathcal{C}^{\vee_0}|$ (III.4.2.), folglich gilt ii $\Longrightarrow$ i .
i $\Longrightarrow$ iii Wegen III.2.7. ist $\mathcal{C}$ rein-exakt in $\mathcal{S} = \mathrm{Add}(\mathcal{A}^{\mathrm{op}},\mathrm{Ab})$ $\Longrightarrow$ $T(\mathcal{C})$ ist exakt für jedes $F \in |\mathcal{S}^{\vee}|$ (II.4.4.) . Wegen der Äquivalenz $\mathcal{S}^{\vee} \longrightarrow \mathcal{C}^{\vee_0}$, $T \longmapsto T/\mathcal{C}$ ist daher $F(\mathcal{C})$ exakt für

jedes $F \in |\mathcal{C}^{\vee_0}|$. iii $\Longrightarrow$ ii ist trivial .

FOLGERUNGEN a) e sei Epimorphismus in $\mathcal{C}$. Äquivalent sind :
i) e ist reiner Epimorphismus in $\mathcal{C}$.
ii) F(e) ist Epimorphismus für jedes $F \in |\mathcal{C}^{\vee_0}|$.
b) $X \xrightarrow{\alpha} Y \xrightarrow{\beta} Z \longrightarrow 0$ sei exakt in $\mathcal{C}$. Äquivalent sind :
i) $X \longrightarrow Y \longrightarrow Z \longrightarrow 0$ ist rein-exakt in $\mathcal{C}$.
ii) $FX \to FY \to FZ \to 0$ ist exakt für jedes $F \in |\mathcal{C}^{\vee_0}|$.
(Zum Beweis von ii $\Longrightarrow$ i überlegt man sich , daß die epi-Kern β – Faktorisierung von α eine rein-epi - Kern β – Faktorisierung ist)
c) Ist $0 \longrightarrow F \longrightarrow G \longrightarrow H \longrightarrow 0$ exakt in $\mathcal{C}^{\vee_0}$, so ist für jeden reinen Epimorphismus e in $\mathcal{C}$ auch die Kern-Sequenz
$0 \to \operatorname{Ker} F(e) \to \operatorname{Ker} G(e) \to \operatorname{Ker} H(e) \to 0$ exakt . (III.5.3.und III.5.4.)

III.5.5. SATZ $\mathcal{O}\mathcal{l}$ sei additiv mit endlichen Coprodukten und Cokernen . Für $F \in |\mathcal{C}^{\vee_0}|$ gelten die Äquivalenzen :
a) F h.i. in $\mathcal{C}^{\vee_0} \Longleftrightarrow F : \mathcal{C} \to Ab$ ist rechtsexakt (d.h. bewahrt Cokerne) .
b) F flach in $\mathcal{C}^{\vee_0} \Longleftrightarrow F : \mathcal{C} \to Ab$ ist linksexakt (d.h. bewahrt Kerne) .

BEWEIS a) ist in III.4.7. gezeigt . b) ergibt sich aus III.5.2.* unter Benutzung der Äquivalenz
$(\mathrm{Add}(\mathcal{O}\mathcal{l}^{op}, Ab))^{\vee} \longrightarrow (\mathrm{Lex}(\mathcal{O}\mathcal{l}^{op}, Ab))^{\vee_0}$ (III.4.5.) .

Nach III.2.8. ist $\mathcal{O}\mathcal{l}$ repräsentativ für $\underline{\mathrm{ep}}$ in $\mathcal{C} = \mathrm{Lex}(\mathcal{O}\mathcal{l}^{op}, Ab)$. In Analogie zu II.6.3. heiße daher $\mathcal{C}$ **lokal kohärent** , **wenn** $\mathcal{O}\mathcal{l}$ Kerne hat .

BEMERKUNG Für $F \in |\mathcal{C}^{\vee_0}|$ sind äquivalent :
o) $F : \mathcal{C} \longrightarrow Ab$ ist exakt (d.h. links- und rechtsexakt) .
i) $F : \mathcal{C} \longrightarrow Ab$ ist linksexakt und $F \in |\mathcal{C}^{\vee}|$.
ii) F ist flach und halbinjektiv in $\mathcal{C}^{\vee_0}$.
iii) $F/\mathcal{O}\mathcal{l}$ ist flach und h.i. in $\mathrm{Add}(\mathcal{O}\mathcal{l}, Ab)$.
und wenn $\mathcal{C}$ lokal kohärent
iv) $F/\mathcal{O}\mathcal{l}$ ist exakt . (II.4.8.,III.4.7.,III.5.5.)

Interessant ist die Frage , welche Funktoren $F \in |\mathcal{C}^{\vee}|$ exakt sind . Aus der vorangegangenen Bemerkung ergibt sich die Antwort :

III.5.6. SATZ Für $F \in |\mathcal{C}^{\vee}|$ sind äquivalent:

o) $F : \mathcal{C} \longrightarrow Ab$ ist exakt .

i) $F : \mathcal{C} \longrightarrow Ab$ ist linksexakt .

ii) F ist flach in $\mathcal{C}^{\vee}$.

iii) $F/\mathcal{O}\mathfrak{l}$ ist flach in $Add(\mathcal{O}\mathfrak{l}, Ab)$.

und wenn $\mathcal{C}$ lokal kohärent

iv) $F/\mathcal{O}\mathfrak{l}$ ist exakt .

v) $F/\mathcal{O}\mathfrak{l}$ ist linksexakt .

In Anknüpfung an III.3.1. erhält man die Äquivalenz

$$\begin{array}{ccc} R\text{-Mod} & \longrightarrow & Lex(\underline{ep}_L{}^{op}, Ab) \\ M & \longmapsto & Hom_R(\cdot, M)/\underline{ep}_L{}^{op} \\ F(R) & \longleftarrow\!\shortmid & F \end{array}$$

Aus II.3.1. und III.4.8. erhält man die Äquivalenz

$$\begin{array}{ccc} Mod\text{-}R & \longrightarrow & Rex(\underline{ep}_L, Ab) \\ X & \longmapsto & (X \otimes \cdot)/\underline{ep}_L \end{array}$$

Beide Äquivalenzen sind analog zu den Äquivalenzen II.6.1.

Vermöge $\mathcal{O}\mathfrak{l} = \underline{ep}_L$ kann man daher Anwendungen auf die Ringtheorie versuchen . R ist links-kohärent genau dann , wenn $\underline{ep}_L$ abelsche Unterkategorie von R-Mod ist (II.6.3.) . Anwendung von III.5.6. führt hier jedoch lediglich zu der bekannten Aussage: Ist R links-kohärent , so ist ein R-Rechts-Modul X genau dann flach , wenn $(X \otimes \cdot)/\underline{ep}_L$ linksexakt ist .

Sei R links-kohärent und $glwdim(R) \leq 2$

$\Longleftrightarrow$ $\underline{eeproj}_R$ hat Cokerne , die nicht mit den in Mod-R gebildeten Cokernen übereinzustimmen brauchen .

$\Longleftrightarrow$ $\underline{eeproj}_R$ ist reflektiv in $\underline{ep}_R$. (Vgl. II.6.9.)

Es ist dann $Lex(\underline{eeproj}_R{}^{op}, Ab) = \underline{flach}$ reflektiv in $Add(\underline{eeproj}_R{}^{op}, Ab)$ (III.2.3.) , folglich $\underline{flach}_R$ reflektiv in Mod-R vermöge der Äquivalenz $Mod\text{-}R \simeq Add(\underline{eeproj}_R{}^{op}, Ab)$.

Dies erhält man auch direkt: Ist für e.p. E in Mod-R $u_E : E \longrightarrow P_E$ Reflexion von E in $\underline{eeproj}_R$, so zeigt man , daß u_E auch Reflexion von E in $\underline{flach}_R$ ist . Man benutzt dazu , daß

jeder flache Modul filtrierender Colimes von e.e.freien Moduln ist , und verwendet Lemma 5 und 6 von Paragraph III.3.
Da jeder Modul filtrierender Colimes von endlich präsentierten ist , erhält man daraus für jeden R-Rechts-Modul eine Reflexion in $\underline{\text{flach}}_R$.

Für die folgenden Aussagen gilt $i \Longleftrightarrow ii \Longrightarrow iii \Longleftrightarrow iv \Longleftrightarrow v$

i) $\underline{\text{e e proj}}_R$ hat Cokerne .
ii) $\underline{\text{e e proj}}_R$ ist reflektiv in $\underline{\text{e p}}_R$.
iii) $\underline{\text{flach}}_R$ ist reflektiv in Mod-R .
iv) $\underline{\text{flach}}_R$ hat Colimites .
v) $\underline{\text{flach}}_R$ hat Cokerne .

(Dabei stimmen die Cokerne in $\underline{\text{e e proj}}_R$ und in $\underline{\text{flach}}_R$ i.a. nicht mit den in Mod-R gebildeten Cokernen überein . Auf Grund der Konstruktion des obigen Reflektors ist die Einbettung $\underline{\text{e e proj}}_R \hookrightarrow \underline{\text{flach}}_R$ rechtsexakt)

Der Beweis ist analog zum Beweis von Lemma III.2.3.

In Analogie zu III.4.6. oder auch als Anwendung von III.4.6. vermöge der Äquivalenzen $\text{Mod-R} \longrightarrow \text{Add}(\underline{\text{e e proj}}_R{}^{\text{op}}, \text{Ab})$ und $\text{R-Mod} \longrightarrow (\text{Mod-R})^{\vee}$ erhält man

III.5.7. SATZ $\underline{\text{e e proj}}_L$ habe Kerne , d.h. R sei links-kohärent und $\text{glwdim}(R) \leq 2$. Für einen R-Links-Modul Y sind dann äquivalent:

i) Y ist halbinjektiv in R-Mod .
ii) $(\cdot \otimes Y)/\underline{\text{e e proj}}_R$ ist rechtsexakt .
iii) $u_D \otimes Y$ ist Isomorphismus für jedes e.p. D in Mod-R , wobei u_D die Reflexion von D in $\underline{\text{e e proj}}_R$ bezeichnet .
iv) $u_D \otimes Y$ ist Isomorphismus für jedes D in Mod-R , wobei u_D die Reflexion von D in $\underline{\text{flach}}_R$ bezeichnet .
v) $(\cdot \otimes Y)/\underline{\text{flach}}_R$ ist rechtsexakt .
vi) $(\cdot \otimes Y)/\underline{\text{flach}}_R$ ist costetig .

Literaturverzeichnis

1. Auslander, M.: Coherent Functors, Proc. Conf. Cat. Algebra La Jolla 1965, Springer, New York (1966)
2. Brune, H.: Über rein-exakte Folgen in lokal endlich-präsentierbaren Kategorien, Diplomarbeit, Bielefeld (1972)
3. Chase, S.: Direct Products of Modules, Trans. Amer. Math. Soc. 97 (1960), 457 - 473
4. Dickson, S.: A Torsion Theory for Abelian Categories, Trans. Amer. Math. Soc. 121 (1966), 223 - 235
5. Fisher, J.: The Tensor Product of Functors. Satellites and Derived Functors. J. Alg. 8 (1968), 277 - 294
6. Fisher-Palmquist, J., Newell, D.: Bifunctors and Adjoint Pairs, Trans. Amer. Math. Soc. 155 (1971), 293 - 303
7. Freyd, P.: Abelian Categories, Harper & Row, New York (1966)
8. Gabriel, P.: Des catégories abéliennes, Bull. Soc. Math. France 90 (1962), 323 - 448
9. Gabriel, P., Ulmer, F.: Lokal präsentierbare Kategorien, Lecture Notes in Math. 221, Springer, Berlin (1971)
10. Lenzing, H.: Über die Funktoren $\mathrm{Ext}^1(\cdot,E)$ und $\mathrm{Tor}_1(\cdot,E)$, Dissertation, Berlin (1964)
11. Lenzing, H.: Endlich präsentierbare Moduln, Arch. Math. 20 (1969), 262 - 266
12. Lenzing, H.: Homologische Methoden in der Ring- und Modultheorie, Vorlesungsmitschrift, Bielefeld 1971/72
13. Lenzing, H.: Modul- und Funktorkategorien, Seminarskript, Bielefeld (1972)
14. Mac Lane, S.: Kategorien, Springer, Berlin (1972)
15. Maddox, B.: Absolutely Pure Modules, Proc. Amer. Math. Soc. 18 (1967), 155 - 158
16. Megibben, C.: Absolutely Pure Modules, Proc. Amer. Math. Soc. 26 (1970), 561 - 566

17. Mitchell, B.: Theory of Categories, Academic Press, New York (1965)

18. Mitchell, B.: Rings with Several Objects, Advances in Math. 8 (1972), 1 - 161

19. Newell, D.: Morita Theorems for Functor Categories, Trans. Amer. Math. Soc. 168 (1972), 423 - 433

20. Schubert, H.: Kategorien I & II, Springer, Berlin (1970)

21. Stenström, B.: Purity in Functor Categories, J. Alg. 8 (1968), 352 - 361

22. Stenström, B.: Coherent Rings and FP-Injective Modules, J. London Math. Soc. 2 (1970), 323 - 329

23. Szasz, G.: Introduction to the Lattice Theory, Academic Press, New York (1963)

24. Watts, C.: Intrinsic Characterizations of some Additive Functors, Proc. Amer. Math. Soc. 11 (1960), 5 - 8

25. Oberst, U., Rohrl, H.: Flat and Coherent Functors, J. Alg. 14 (1970), 91 - 105

Lebenslauf

Am 8. Dezember 1942 wurde ich als Sohn des jetzigen Regierungsrats Arno Bernecker und seiner Ehefrau Gertrud geb. Scheller in Berlin geboren. Seit 1945 wohnte ich in Fleestedt (Landkreis Harburg), wo ich von 1949 bis 1954 die Volksschule besuchte. Ab 1954 besuchte ich das Humboldt-Gymnasium in Hannover, ab 1956 das Gertrauden-Gymnasium in Berlin, wo ich 1962 die Reifeprüfung ablegte.

Seit dem Sommersemester 1962 studierte ich an der Freien Universität Berlin Mathematik mit den Nebenfächern Physik und Statistik/Versicherungsmathematik. Hier bestand ich im Dezember 1964 die Diplomvorprüfung und im Mai 1968 die Diplomhauptprüfung. Meine Lehrer in Mathematik waren die Professoren Dinghas, Gottschling, Grotemeyer, Herrlich, Orsinger, Pachale, Ringel, Stöhr.

Seit November 1969 bin ich als Wissenschaftlicher Assistent am II. Mathematischen Institut der Freien Universität beschäftigt. Von 1969 bis 1972 war ich nebenamtlicher Dozent für Mathematik an der Fachhochschule für Wirtschaft Berlin.